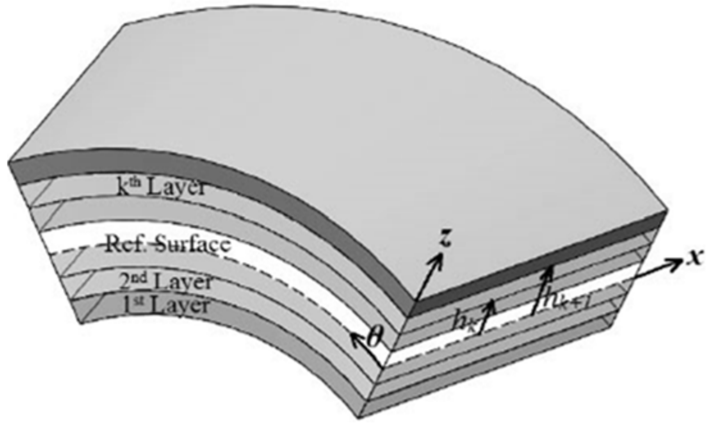
1. КЛАСИЧНА ТЕОРИЈА ЛАМИНАТА

6.1. Увод у класичну теорију ламината

Слагањем ламина у одређени распоред настаје ламинат. Напонско деформационо стање ламината функција је особина ламина као и начина слагања ламина које сачињавају ламинат. Класична теорија ламината (*CLT– classical lamination theory*) којом се са великом тачношћу може одредити напонско деформационо стање ламината важи под следећим претпоставкама:

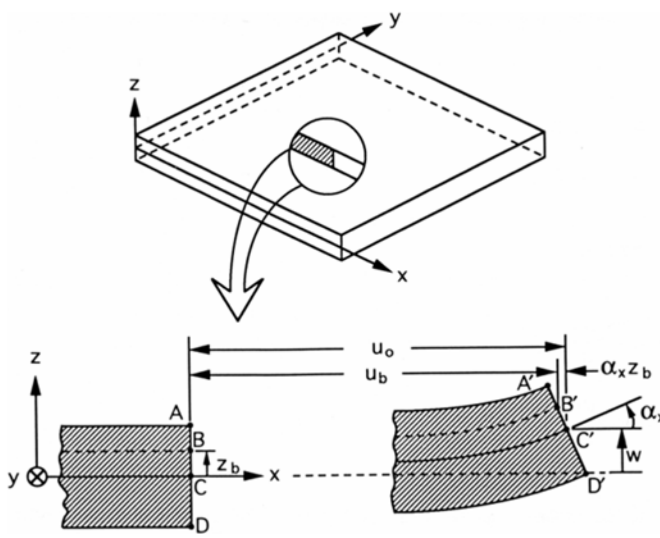
- ламине су сачињене од ортотропских материјала,
- дебљина ламине много је мања у односу на њену површину и оптерећена је само у својој равни тако да се налази у стању раванског стања напона,
- сва померања су мала у поређењу са дебљином ламината,
- померања су континуална,
- клизања γ_{xz}, γ_{yz} су занемарљива,
- напони су линеарне функције деформација,
- деформације у правцу з осе ламината ε_3 су занемарене у односу на деформације у правцу осталих оса (ε_1 ,ε_2),
  - померања у равни мењају се линеарно кроз дебљину ламината, односно померања ***u*** и ***v*** у правцима ***x*** и ***y*** оса су линеарне функције од ***z***.



Слика 6.1. Композитна ламина

6.2. Класична теорија ламината (CLT теорија)

Посматрамо део композитног ламината у недеформисаном и деформисаном стању.



Слика 6.2. Композитни ламинат у деформисаном положају

Раван ***xy*** која је подједнако удаљена од горње и доње ивице ламината назива се референтном равни. Померања у референтној равни u_0 и v_0 у правцу ***x*** и ***y*** оса, као и померање ***w*** у правцу ***z*** осе су функције координата ***x*** и ***y,*** али не и ***z*** координате, односно:

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u_0\left(x, y\right) \\
v_0 &= v_0\left(x, y\right) \quad , \\
w_0 &= w_0\left(x, y\right)
\end{aligned}
$$

тако да су нагиби ***x*** и ***y*** оса дефинисани следећим релацијама:

$$\alpha_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\alpha_y = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Померање тачке ***b*** је дато са:

$$u_b = u_0 - \alpha_x z_b$$
$$v_b = v_0 - \alpha_y z_b$$

Односно у општем случају за било коју тачку, следи:

$$u = u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$v = v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y}.$$

На основу дефиниције деформација за случајеве малих померања следи да су деформације једнаке:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_x = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_s = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$
$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Деформације у референтној равни су:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}$$
$$\gamma_{xy}^0 = \gamma_s^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

Закривљености дефинисане су следећим релацијама:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad ,$$

$$\kappa_{xy} = \kappa_s = -\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

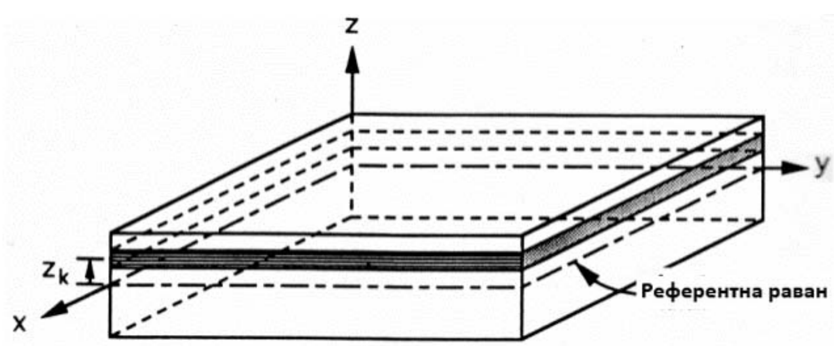
тако да се деформације у било којој тачки ламината могу изразити преко деформација референтне равни и закривљености на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}$$

6.3. Релације напон – деформација слоја у оквиру ламината

Напонско деформационо стање ламине, као што је раније показано, може бити представљено на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}_k$$



Слика 6.3. Положај референтне равни композитног ламината

Односно, може бири изражено у координатом систему ламината:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}_k ,$$

тако да се заменом претходних релација може написати

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix},$$

односно у скраћеном облику

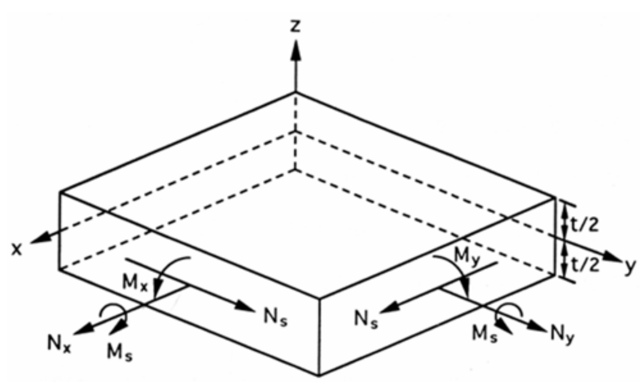
$$\left[\sigma\right]_{x,y}^{k} = \left[\sigma\right]_{x,y}^{k} \left[\varepsilon^0\right]_{x,y} + z\left[\sigma\right]_{x,y}^{k} \left[\kappa\right]_{x,y}$$

На основу ове релације закључује се да се деформације мењају линеарно по дебљини ламината, док напони нису континуални.

Слика 6.4. Деформације и напони у слојевима композитног ламината

6.4. Силе и моменти, резултанте, крутост ламината

Напони ламине могу бити изражени и преко резултујућих сила по јединици дужине и момената савијања и увијања по јединици дужине на следећи начин:



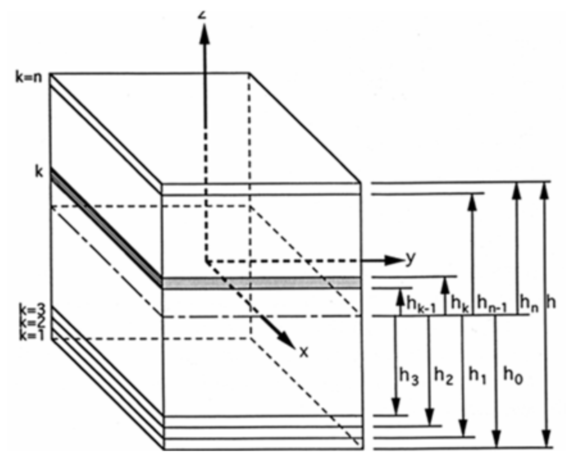
Слика 6.5. Силе, моменти и резултанте композитног ламината

$$N_x^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \qquad M_x^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz$$
$$N_y^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \qquad M_y^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \qquad ,$$
$$N_{xy}^k = N_s^k = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s dz \qquad M_{xy}^k = M_s^k = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s z dz$$

тако да за ламинат важи:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} dz$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} \mathrm{z} dz$$



Слика 6.6. Положај слојева у ламинату

Резултујуће силе и моменте добијамо интеграцијом напона по дебљини ламината, а затим их доводимо у везу са деформацијама и закривљенима референтне средишње равни, заменом претходних израза следи:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \sum_{\kappa=1}^{н} \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_{\kappa} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \int_{-t/2}^{t/2} dz + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_{\kappa} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \int_{-t/2}^{t/2} z dz \right\}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \sum_{\kappa=1}^{н} \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_{\kappa} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} \int_{-t/2}^{t/2} z dz + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_{\kappa} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \right\}$$

$$[N]_{x,y} = \left[\sum_{k=1}^{n} [Q]_{x,y}^{k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] \left[\varepsilon^0 \right]_{x,y} + \left[\sum_{k=1}^{n} [Q]_{x,y}^{k} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] [\kappa]_{x,y} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} [Q]_{x,y}^{k} \left(h_k - h_{k-1} \right) \right] \left[\varepsilon^0 \right]_{x,y} + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [Q]_{x,y}^{k} \left(h_k^2 - h_{k-1}^2 \right) \right] [\kappa]_{x,y} =$$

$$= [A]_{x,y} \left[\varepsilon^0 \right]_{x,y} + [A]_{x,y} [\kappa]_{x,y}$$

$$[M]_{x,y} = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [Q]_{x,y}^{k} \left(h_\kappa^2 - h_{\kappa-1}^2 \right) \right] \left[\varepsilon^0 \right]_{x,y} +$$

$$+ \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} [Q]_{x,y}^{k} \left(h_\kappa^3 - h_{\kappa-1}^3 \right) \right] [\kappa]_{x,y} = [B]_{x,y} \left[\varepsilon^0 \right]_{x,y} + [D]_{x,y} [\kappa]_{x,y}$$

$$A_{i,j} = \sum_{\kappa=1}^{n} Q_{i,j}^{k} \left(h_k - h_{k-1} \right)$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^{n} Q_{i,j}^{k} \left(h_k^2 - h_{k-1}^2 \right)$$

$$D_{i,j} = \frac{1}{3} \sum_{\kappa=1}^{n} Q_{i,j}^{k} \left(h_k^3 - h_{k-1}^3 \right)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ \mathrm{B}_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ \mathrm{B}_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix},$$

где су: [A] – истезна крутост, [B] – савојно истезна крутост, [D] – савојна крутост. Матрица се зове ABD матрица, може се рећи да она представља глобалну матрицу крутости ламината, она доводи у везу резултујуће силе и моменте по јединици дужине који делују на ламинат и деформације и закривљења референтне равни.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}$$

Инверзијом претходног израза добија се облик ABD матрице у следећем облику:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{16}^* & B_{11}^* & B_{12}^* & B_{16}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & A_{26}^* & B_{12}^* & B_{22}^* & B_{26}^* \\ A_{16}^* & A_{26}^* & A_{66}^* & B_{16}^* & B_{26}^* & B_{66}^* \\ C_{11}^* & C_{12}^* & C_{16}^* & D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ C_{12}^* & C_{22}^* & C_{26}^* & D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ C_{16}^* & C_{26}^* & C_{66}^* & D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix},$$

односно у скраћеном облику:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix},$$

при чему, такође, важе релације:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix}$$

$$A^* = A^{-1},$$

$$B^* = B^{-1},$$

$$D^* = D^{-1},$$

$$C^* = B^{*T}$$

6.5. Симетрични ламинати

Посебну групу композитних материјала (према начину слагања ламина) чине симетрични ламинати. Код симетричних ламината, за сваки слој постоји симетричан слој у односу на референтну раван од истог материјала, исте дебљине и са истим правцем простирања влакана. Код ове врсте ламината сви коефицијенти у матрици „ABD” $\boldsymbol{B_{ij}}$ (i, j = 1, 2, 6) једнаки су нули, тако да за ову врсту ламината мембранске силе изазивају само раванске деформације, односно моменти савијања и увијања изазивају само појаву закривљености структуре. У општем случају, код симетричних ламината сви коефицијенти у $\mathbf{A}_{ij}$ (i, j = 1, 2, 6) и $\mathbf{D}_{ij}$ (i, j = 1, 2, 6) различити су од нуле. Тако су, на пример, за композитни материјал који се састоји од два ламината од истог материјала и исте дебљине са влакнима усмереним у правцу -30° еластични коефицијенти:

```
Stacking Sequence
*****************

 Layer    Matl    Ply Angle     Ply Thickness

   1        1       -30.0        1.000e+000
   2        1       -30.0        1.000e+000
                                 ----------
Total Laminate Thickness :       2.000e+000


Laminate Matrices
*****************


                                'ABD' Matrix

  2.188e+011   6.491e+010  -1.084e+011    0.000e+000   0.000e+000   0.000e+000
  6.491e+010   4.727e+010  -4.013e+010    0.000e+000   0.000e+000   0.000e+000
 -1.084e+011  -4.013e+010   7.348e+010    0.000e+000   0.000e+000   0.000e+000

  0.000e+000   0.000e+000   0.000e+000    7.293e+010   2.164e+010  -3.614e+010
  0.000e+000   0.000e+000   0.000e+000    2.164e+010   1.576e+010  -1.338e+010
  0.000e+000   0.000e+000   0.000e+000   -3.614e+010  -1.338e+010   2.449e+010
```

6.6. Уравнотежени ламинати

Уколико се ламинат састоји од парова ламина истих дебљина, истог материјала али са влакнима усмереним у правцу + θ и –θ (угао θ означава угао правца простирања влакана ламине у односу на „x” осу ламината), ламинат називамо уравнотеженим (енг. *Balanced*).

Постоје следеће врсте уравнотежених ламината:

- уравнотежен симетричан $[\pm\theta_1/\pm\theta_2]_s$,
- уравнотежен антисиметричан $[\theta_1/\theta_2/-\theta_2/-\theta_1]$,
- уравнотежен асиметричан $[\theta_1/\theta_2/-\theta_1/-\theta_2]$.

Код уравнотежених ламината коефицијенти A_{16}, A_{26} једнаки су нули. Односно код ове врсте слагања аксијалне мембранске силе (N_x, N_y) не проузрокују деформације клизања γ_{xy}, а смичуће силе (N_{xy}) не проузрокују аксијалне деформације (ε_x^0, ε_y^0).

```
Stacking Sequence
*****************

 Layer    Matl     Ply Angle     Ply Thickness

   1        1         30.0        1.000e+000
   2        1         45.0        1.000e+000
   3        1        -30.0        1.000e+000
   4        1        -45.0        1.000e+000
                                  ----------
Total Laminate Thickness :        4.000e+000


Laminate Matrices
*****************

                                 'ABD' Matrix

  3.321e+011   1.495e+011   7.629e-006   -5.274e+010   9.856e+009  -1.942e+011
  1.495e+011   1.606e+011  -7.629e-006    9.856e+009   3.302e+010  -1.259e+011
  7.629e-006  -7.629e-006   1.667e+011   -1.942e+011  -1.259e+011   9.856e+009

 -5.274e+010   9.856e+009  -1.942e+011    4.428e+011   1.994e+011   2.265e+010
  9.856e+009   3.302e+010  -1.259e+011    1.994e+011   2.141e+011  -4.563e+010
 -1.942e+011  -1.259e+011   9.856e+009    2.265e+010  -4.563e+010   2.222e+011
```

Уколико су коефицијенти $\boldsymbol{D_{16}}$, $\boldsymbol{D_{26}}$ различити од нуле, долази до увијања при дејству момената савијања (и у случајевима када је $\boldsymbol{M_{xy}} = 0$), што код композитних ламината може довести до појаве великих вредности интерламинарних напона. Вредности ових коефицијената једнаки су нули само код антисиметричних уравнотежених типова слагања ламина.

```
Stacking Sequence
*****************

 Layer    Matl     Ply Angle     Ply Thickness

   1        1         30.0        1.000e+000
   2        1         45.0        1.000e+000
   3        1        -45.0        1.000e+000
   4        1        -30.0        1.000e+000
                                  ----------
Total Laminate Thickness :        4.000e+000


Laminate Matrices
*****************

                                 'ABD' Matrix

  3.321e+011   1.495e+011   7.629e-006    0.000e+000  -7.629e-006  -2.055e+011
  1.495e+011   1.606e+011  -3.815e-006   -7.629e-006   0.000e+000  -1.031e+011
  7.629e-006  -3.815e-006   1.667e+011   -2.055e+011  -1.031e+011   7.629e-006

  0.000e+000  -7.629e-006  -2.055e+011    5.483e+011   1.797e+011  -1.526e-005
 -7.629e-006   0.000e+000  -1.031e+011    1.797e+011   1.481e+011   0.000e+000
 -2.055e+011  -1.031e+011   7.629e-006   -1.526e-005   0.000e+000   2.025e+011
```

Једини начин слагања код кога су $\mathbf{B}_{ij}$ (i, j = 1, 2, 6), $\boldsymbol{A_{16}}$, $\boldsymbol{A_{26}}$ и $\boldsymbol{D_{16}}$, $\boldsymbol{D_{26}}$ једнаки нули, можемо добити при слагању $[0/90_2]_s$.

Stacking Sequence
****

Layer	Matl	Ply Angle	Ply Thickness
1	1	0.0	1.000e+000
2	1	90.0	1.000e+000
3	1	90.0	1.000e+000
4	1	90.0	1.000e+000
5	1	90.0	1.000e+000
6	1	0.0	1.000e+000

Total Laminate Thickness :			6.000e+000

Laminate Matrices
****

'ABD' Matrix

4.050e+011	1.734e+010	4.467e-005	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
1.734e+010	7.480e+011	1.064e-003	0.000e+000	-1.907e-005	0.000e+000
4.467e-005	1.064e-003	4.303e+010	0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000
0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	2.358e+012	5.202e+010	5.956e-005
0.000e+000	-1.907e-005	0.000e+000	5.202e+010	1.101e+012	1.418e-003
0.000e+000	0.000e+000	0.000e+000	5.956e-005	1.418e-003	1.291e+011