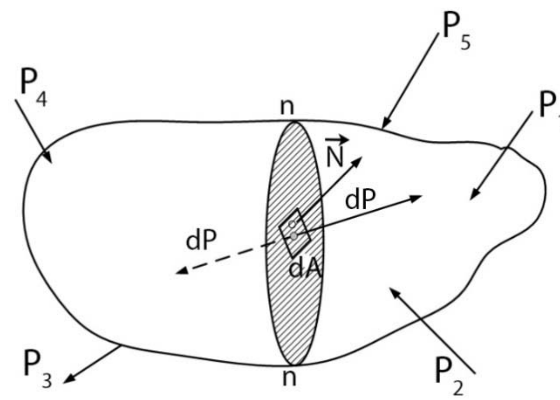
# 1. ОСНОВЕ ОПШТЕ ТЕОРИЈЕ ЕЛАСТИЧНОСТИ КОМПОЗИТНИХ КОНСТРУКЦИЈА

## 2.1. Увод у општу теорију еластичности композитних материјала

Анализирамо дејстство спољашњих сила на еластича тела, и то за случај малих деформација. Спољне силе могу бити површинске и запреминске. Површинске силе делују на тачке спољних површина и независне су од масе. Запреминске силе делују у свим тачкама тела и пропорционалне су маси тела.

Посматрајмо тело напрегнуто спољним силама $\boldsymbol{P_i}$ (i = 1, n). Претпоставимо да се под дејством оваквог система сила тело налази у равнотежи. Замислимо да је тело подељено замишљеном равни на два дела у тачки $\boldsymbol{O}$. Посматрајући сваки део тела посебно, закључујемо да ће се он налазити у равнотежи под дејством система спољних сила и одговарајућих унутрашњих сила распоређених по попречном пресеку. Унутрашње силе представљају утицај једног дела на други део пресеченог тела.




*Слика 2.1.* *Дејство спољашњег оптерећења* $\boldsymbol{P_i}$ *на еластично тело*

Уколико уочимо елементарну површину $\boldsymbol{dA}$ са нормалом $\boldsymbol{N}$ у некој тачки $\boldsymbol{O}$ на пресеку тела и са $\boldsymbol{dP}$ обележимо резултанту унутрашњих сила по површини $\boldsymbol{dA}$, дефинисаћемо напон као:

$$\lim_{dA\to 0}\frac{dP}{dA}$$

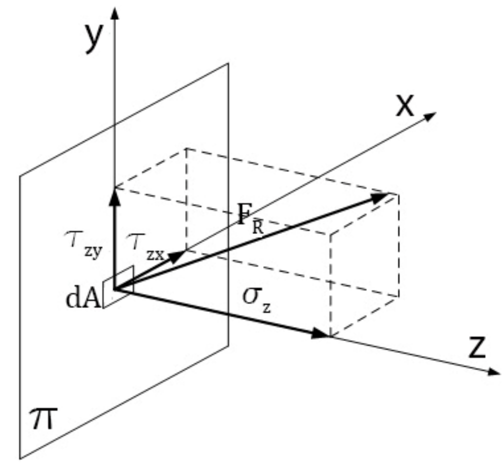
Како у општем случају нормала и резултанта унутрашњих сила нису колинеарне разлагањем вектора унутрашњих сила на правац нормалан на елементарну површину и у раван пресека, дефинишемо нормалне и тангенцијалне напоне.

Компоненте напона можемо представити на следећи начин:

$$\sigma = \lim_{dA\to 0}\frac{dP_n}{dA}$$

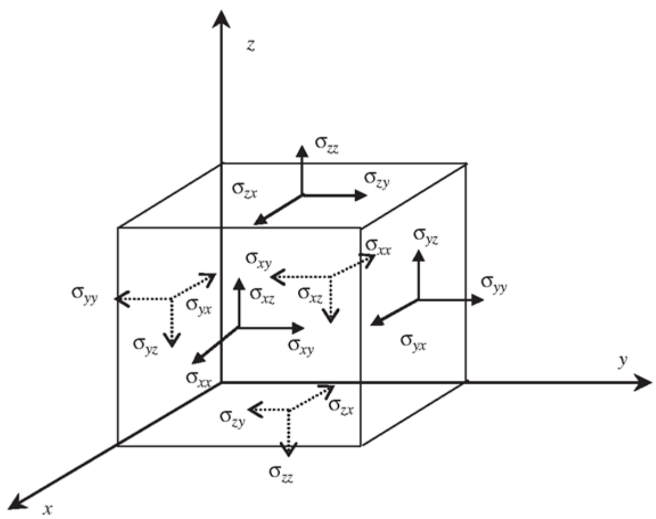
$$\tau = \lim_{dA\to 0}\frac{dP_s}{dA}$$

Напон као тензорску величину означавамо са два индекса. Први индекс означава правац нормале равни на коју се напон односи а други на правац напона.



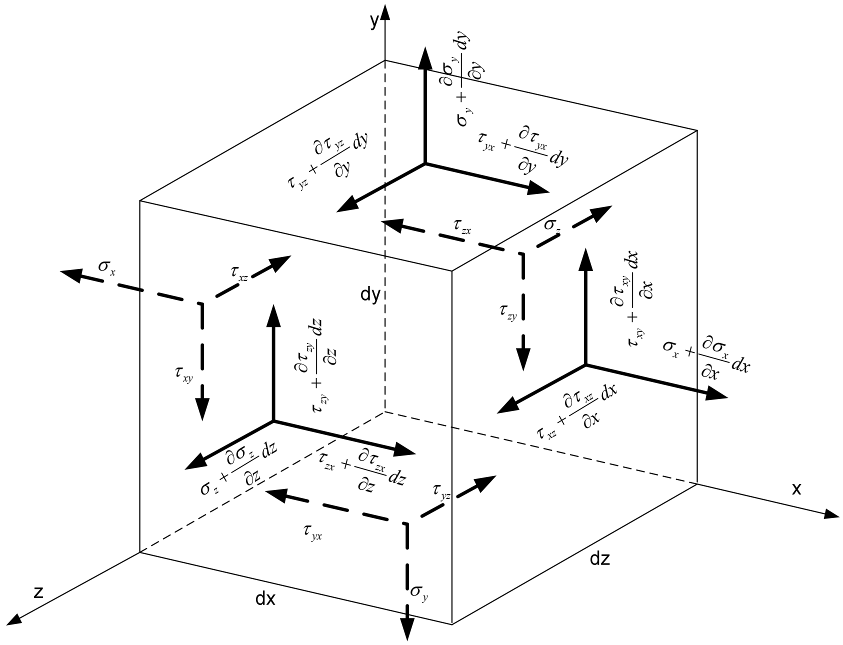

*Слика 2.2. Нормални и тангенцијални напони на елементарној површини* ***dA***

Нормални напон усваја се као позитиван када је затежући, односно када делује од површине на коју је нормалан. Позитивне правце смичућих напона дефинишемо на следећи начин: за површину чији је напон затезања у позитивном правцу одговарајуће осе, смичући напон биће позитиван када се поклапа са позитивним правцима осталих двеју оса.




*Слика 2.3. Компоненте напона у правцима изабраних оса* ***x, y, z***

Посматрајмо равнотежу елементарног делића издвојеног из напрегнутог тела, са ивицама ***dx, dy, dz***. Оптерећен је континуално распоређеним унутрашњим силама, док у појединим тачкама делују запреминске силе.




*Слика 2.4. Компоненте нормалних и тангенцијалних напона*

## 2.2. Једначине равнотеже

Посматрајући равнотежу сила у ***x*** правцу следи да је:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dxdz$$

$$-\tau_{yx} dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy - \tau_{zx} dxdy + Xdxdydz = 0$$

Односно после сређивања:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Посматрајући равнотежу момената око ***x*** осе следи да је:

$$\tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dx}{2} -$$
$$-\tau_{yx} dxdz \frac{dy}{2} - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dxdz \frac{dy}{2} = 0$$
$$\tau_{xy} dxdydz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dydz \frac{(dx)^2}{2} - \tau_{yx} dxdydz -$$
$$-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdz \frac{(dy)^2}{2} = 0$$

После сређивања и занемаривања чланова вишег реда следи да је:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Посматрајући равнотежу сила у $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ правцу на сличан начин, може бити показано да важе следеће релације:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Z = 0$$

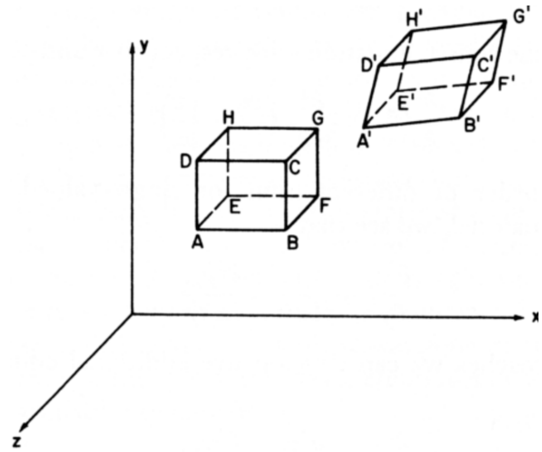
Односно посматрајући равнотежу момената око $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ осе следи да је и:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Претходно изведене једначине познате су под називом Навијеове (Navier) једначине равнотеже елементарног дела.

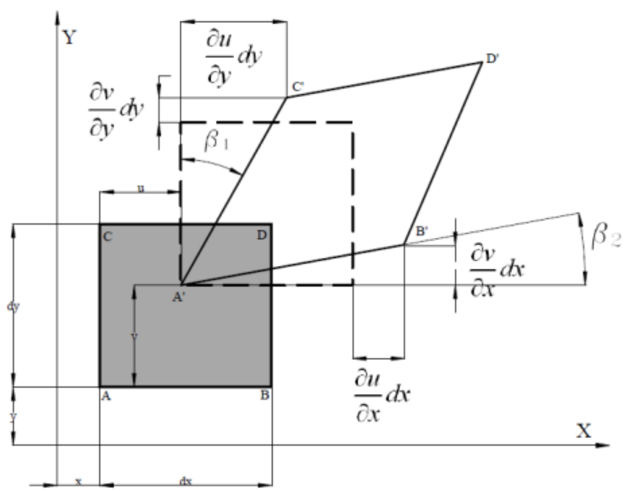
## 2.3. Деформације

За налажење напона услови равнотеже нису довољни и потребно је узети у обзир деформације тела услед деловања спољних сила. Ако су координате произвољне тачке пре деформисања биле ***x, y*** и ***z,*** њене координате ће после деформисања бити ***x+u, y+v*** и ***z+w***, где су ***u, v,*** и ***w*** померања тачке у ***x, y*** и ***z*** правцу. Померања су функције ***x, y*** и ***z*** координата посматране тачке.




*Слика 2.5.* *Померање и деформација елементарног дела структуре*

Посматрајмо дводимензионални случај деформација.




*Слика 2.6.* *Раванске деформације елементарног дела структуре*

Како је:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dx}{dx}$$

$$\left(A'B'\right)^2 = \left[dx\left(1+\varepsilon_x\right)\right]^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2$$

$$\varepsilon_x{}^2 + 2\varepsilon_x + 1 = 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

За случај малих деформација могу бити занемарени чланови вишег реда, па на основу тога следи да су аксијалне деформације у функцији померања дефинисане следећим релацијама:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Деформације клизања дефинишемо на следећи начин:

$$\gamma_{xy} = \beta_1 - \beta_2$$

Водећи рачуна да се анализира случај малих деформација, може се сматрати да је $\beta_1 = \tan \beta_1$ односно $\beta_2 = \tan \beta_2$, па су деформације клизања:

$$\beta_1 = \frac{(\partial v / \partial x)\, dx}{dx + (\partial u / \partial x)\, dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

На сличан начин добија се да је:

$$\beta_2 = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

тако да су деформације клизања у функцији померања дефинисане су на следећи начин:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

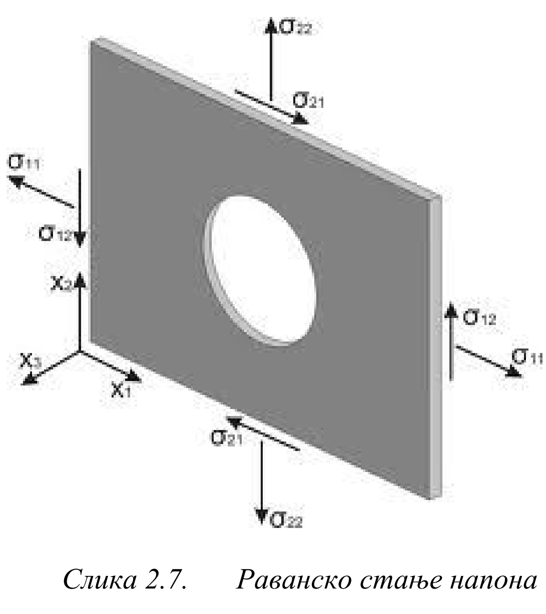
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Претходне једначине написане у матричном облику гласе:

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}
$$

## 2.4. Раванско стање напона

Раванско или дводимензионално стање напона јавља се код тела чија је једна димензија у правцу једне од оса врло мала у односу на остале. Такав случај напонског стања јавља се код танкозидних конструкција, случај танких плоча под дејством сила равномерно подељених дуж дебљине и паралелних равни плоче.




*Слика 2.7. Раванско стање напона*

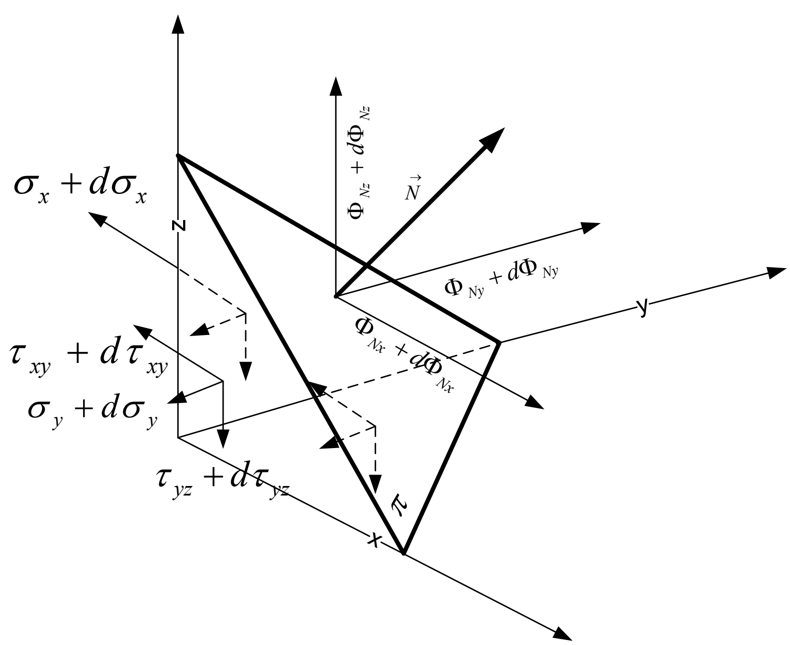
Како на основама плоче не делују површинске силе, напони у правцу ***z*** осе (оса нормална на раван плоче) морају бити једнаки нули. Пошто је дебљина плоче мала, може се са великом тачношћу претпоставити да су ови напони једнаки нули и у тачкама тела између основа. Такође, преостали напони могу се сматрати константним дуж дебљине, односно напони су зависни само од координата ***x*** и ***y*** али не и од ***z***. На основу овога следи да једначине равнотеже за случај раванског стања напона гласе:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + Y = 0$$

## 2.5. Напонско стање за произвољну раван

Напонско стање тела биће потпуно познато ако су познати напони у свим тачкама и то за све равни кроз одговарајуће тачке. Напони за разне равне међусобно су зависни, односно ако су познати компонентини напони $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$, $\boldsymbol{\sigma_z}$, $\boldsymbol{\tau_{xy}}$, $\boldsymbol{\tau_{yz}}$, $\boldsymbol{\tau_{zx}}$ за било коју тачку тела могуће је израчунати напон за произвољну раван кроз исту тачку. Повуцимо кроз тачку ***O*** напрегнутог тела три ортогоналне равни. Нека су компоненте напона у тој тачки $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$, $\boldsymbol{\sigma_z}$, $\boldsymbol{\tau_{xy}}$, $\boldsymbol{\tau_{yz}}$, $\boldsymbol{\tau_{zx}}$ познате. Да бисмо нашли напоне за раван кроз тачку ***O***, чија нормала ***N*** има косинусе смерова ***l***, ***m i n***, замислимо неку раван ***π***, паралелну овој, на бесконачно малом удаљену ***dh*** од ***O***.



*Слика 2.8. Пројекције компоненти напона на произвољну раван* $\boldsymbol{\pi}$

Ова раван ће са координатним равнима образовати тетраедар, са ивицама ***dx***, ***dy***, ***dz***. Обележавајући напоне за посматрану раван са $\boldsymbol{\Phi_{Nx}}$, $\boldsymbol{\Phi_{Ny}}$ и $\boldsymbol{\Phi_{Nz}}$, услов равнотеже у ***X*** правцу је:

$$
\begin{aligned}
&\left(\phi_{Nx}+d\phi_{Nx}\right)A-\left(\sigma_x+d\sigma_x\right)lA-\left(\tau_{xy}+d\tau_{xy}\right)mA-\\
&-\left(\tau_{zx}+d\tau_{zx}\right)nA+X\left(\frac{1}{3}Adh\right)=0
\end{aligned}
$$

После сређивања следи:

$$\phi_{Nx}=l\sigma_x+m\tau_{xy}+n\tau_{zx}$$

Сличне једначине добијамо и из услова равнотеже у ***y*** и ***z*** правцу, па пуштајући да ***dh*** тежи нули и делећи одговарајуће једначине са ***A*** добија се:

$$
\begin{aligned}
\phi_{Ny}&=l\tau_{xy}+m\sigma_y+n\tau_{yz}\\
\phi_{Nz}&=l\tau_{zx}+m\tau_{yz}+n\sigma_z
\end{aligned}
$$

Ове једначине омогућују нам да помоћу шест познатих компоненти напона за три ортогоналне равни у произвољној тачки нађемо компоненте напона за било коју раван кроз ту тачку.

У било којој тачки тела постоје три међусобно управне равни на којима су укупни напони управни и за једну од ових равни нормални напон је највећи, а за једну најмањи. Напони који одговарају овим равнима називају се главним напонима и обично се обележавају са $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$ и $\boldsymbol{\sigma_3}$. Главне напоне $\boldsymbol{\sigma_i}$ ($\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$) и њихове косинусе смерова налазимо из Кошијевих једначина које у случају главних напона постају:

$$
\begin{aligned}
\sigma_i l_i&=l_i\sigma_x+m_i\tau_{xy}+n_i\tau_{zx}\\
\sigma_i m_i&=l_i\tau_{xy}+m_i\sigma_y+n_i\tau_{yz}\\
\sigma_i n_i&=l_i\tau_{zx}+m_i\tau_{yz}+n_i\sigma_z
\end{aligned}
$$

Преко једначина деформација могуће је пронаћи деформације ако су нам позната померања тачке у било којој тачки напрегнутог тела.

## 2.6. Једначине компатибилности

Уколико бисмо извршили двоструко диференцирање прве једначине деформација по координати ***y*** добија се следећа једначина:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Диференцирањем четврте једначине деформација координата ***x*,** а затим координата ***y***, добија се следећа релација:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial^2}{\partial_x \partial_y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Односно, на основу претходних релација следи:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Примењујући исти поступак и на осталих пет једначина равнотеже добија се следећи систем парцијалних диференцијалних једначина:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_y \partial_z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial_z \partial_x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial_x \partial_y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Ове једначине познате су као једначине компатибилитета.

## 2.7. Генералисани Хуков закон

Под идеално еластичним телом подразумевамо тела код којих су напони линеарне функције деформација и обрнуто. За таква тела веза између напона и деформација може бити написана у следећем облику:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{13}\sigma_z + c_{14}\tau_{xy} + c_{15}\tau_{zy} + c_{16}\tau_{zx} \\
\varepsilon_y &= c_{21}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{23}\sigma_z + c_{24}\tau_{xy} + c_{25}\tau_{zy} + c_{26}\tau_{zx} \\
\varepsilon_z &= c_{31}\sigma_x + c_{32}\sigma_y + c_{33}\sigma_z + c_{34}\tau_{xy} + c_{35}\tau_{zy} + c_{36}\tau_{zx} \\
\gamma_{xy} &= c_{41}\sigma_x + c_{42}\sigma_y + c_{43}\sigma_z + c_{44}\tau_{xy} + c_{45}\tau_{zy} + c_{46}\tau_{zx} \\
\gamma_{yz} &= c_{51}\sigma_x + c_{52}\sigma_y + c_{53}\sigma_z + c_{54}\tau_{xy} + c_{55}\tau_{zy} + c_{56}\tau_{zx} \\
\gamma_{zx} &= c_{61}\sigma_x + c_{62}\sigma_y + c_{63}\sigma_z + c_{64}\tau_{xy} + c_{65}\tau_{zy} + c_{66}\tau_{zx}
\end{aligned}
$$

Претходне једначине познате под називом генералисани Хуков закон представљају везу између деформација и напона у напрегнутом еластичном телу, за тродимензионално напонско стање. Величине $\boldsymbol{C_{ij}}$ представљају еластичне константе и њихове вредности зависе од врсте материјала.

Генералисани Хуков закон може бити написан и у другачијем облику, односно, напони који описују тродимензионално напонско стање могу би изражени у функцији одговарајућих деформација. Написан у матричном облику генералисани Хуков закон гласи:

$$
\left[\sigma_i\right] = \left[S_{ij}\right]\left[\varepsilon_i\right]
$$

## 2.8. Проблеми анализе чврстоће композитних конструкција

У проблемима анализе чврстоће композитних конструкција најчешће се тражи расподела напона по самој конструкцији. Ово важи генерално за напонску анализу свих конструкција. Потребно је наћи шест компонентних напона у функцији координата тела. Ови напони морају у свакој тачки тела задовољити три једначине равнотеже, а у тачкама спољни површина задате контурне услове. Како у општем случају тродимензионалног напонског стања постоји шест компоненти напона у свакој тачки напрегнутог тела, три једначине равнотеже нису довољне да би се одредило напонско стање у еластичном напрегнутом телу, односно није могуће решити једначине равнотеже (три једначине, шест непознатих величина које представљају напоне у посматраној тачки).

Како би претходни проблем био решив, уводи се шест компоненти деформација, које су изражене преко шест релација, а у функцији компоненти померања.

Карактеристике материјала, тела, односно зависност деформација и напона у напрегнутом телу дефинисано је преко шест једначина Хуковог закона, тако да у општем случају анализе чврстоће композитне конструкције напонско-деформационо стање дефинисано је преко следећих величина:

- три компоненте померања,
- шест компоненти напона,
- шест компоненти деформација.

Дакле, да би било дефинисано напонско деформационо стање у свакој тачки деформисане композитне конструкције потребно је одредити све наведене величине и то у свакој тачки напрегнутог тела.

Како је укупан број непознатих величина које дефинишу напонско-деформационо стање петнаест, потребно нам је и петнаест једначина како би проблем могао бити решен. Једначине које описују напонско-деформационо стање композитне структуре су следеће:

1. једначине равнотеже (укупно три),
2. једначине деформација (укупно шест),
3. генералисани Хуков закон (укупно шест једначина).

Како би проблем напонско-деформационог стања имао јединствено решење потребно је још и да једначине компатибилитета буду задовољене. У том случају постоји јединствено решење проблема напонске анализе композитне структуре.