1. ЕЛАСТИЧНЕ ОСОБИНЕ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРИЈАЛА

3.1. Увод

Кроз било коју тачку еластичног напрегнутог тела могуће је провући три међусобно управне равни са укупно девет компонентиних напона. За произвољно изабрани координатни систем напони који делују на површине делића приказани су на слици 3.1.

Напон као тензорску величину означавамо са два индекса. Први индекс означава правац нормале равни на коју се напон односи, а други на правац напона.

Овим напонима, као последица дејства спољашњих сила на еластично тело, одговарају деформације, које у функцији померања могу бити представљене као:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Односно у тензорској нотацији:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$$

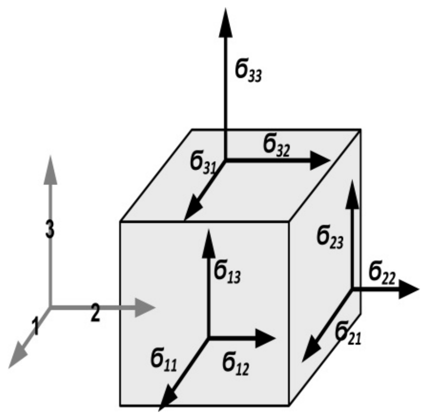
У претходној релацији $\boldsymbol{u}$ је вектор померања, $\boldsymbol{x}$ индекс узима вредност координате, а индекси $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ узимају вредности $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ у тродимензионалном простору.

Веза између напона и деформација може бити представљена преко Хуковог закона (Hooke), при чему су деформације линеарне функције напона и обрнуто.

Хуков закон представљен у тензорској нотацији приказан је следећом релацијом:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}$$

Тензори деформација $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$ и тензор напона $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ су тензорске величине другога реда, тако да су коефицијенти $\boldsymbol{S_{ijkl}}$ коефицијенти тензора четвртог реда. За усвојени координатни систем ***1, 2***, ***3*** (слика 3.1).



Слика 3.1.Компоненте напона

Претходна релација у развијеном облику је следећег облика.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112} & S_{1132} & S_{1113} & S_{1121} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212} & S_{2232} & S_{2213} & S_{2221} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3312} & S_{3332} & S_{3313} & S_{3321} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312} & S_{2332} & S_{2313} & S_{2321} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3123} & S_{3131} & S_{3112} & S_{3132} & S_{3113} & S_{3121} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1231} & S_{1212} & S_{1232} & S_{1213} & S_{1221} \\ S_{3211} & S_{3222} & S_{3233} & S_{3223} & S_{3231} & S_{3212} & S_{3232} & S_{3213} & S_{3221} \\ S_{1311} & S_{1322} & S_{1333} & S_{1323} & S_{1331} & S_{1312} & S_{1332} & S_{1313} & S_{1321} \\ S_{2111} & S_{2122} & S_{2133} & S_{2123} & S_{2131} & S_{2112} & S_{2132} & S_{2113} & S_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}$$

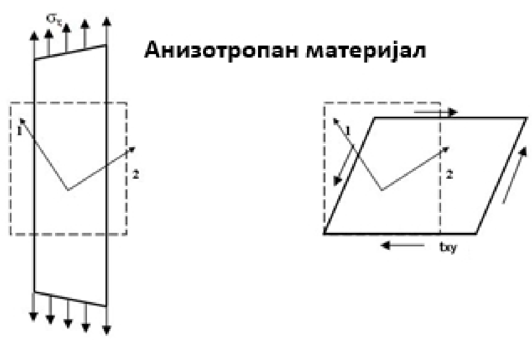
Односно напони као линеарне функције деформација

$$
\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\
C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\
C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\
C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\
C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\
C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\
C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\
C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\
C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix}
$$

На основу тога следи да у тродимензионалном простору постоји $3^4 = 81$ компоненти тензора $\boldsymbol{S_{ijkl}}$.

3.2. Анизотропни материјали

Код анизотропних материјала особине материјала су различите у свим правцима.



Слика 3.2. Оптерећење анизотропног материјала

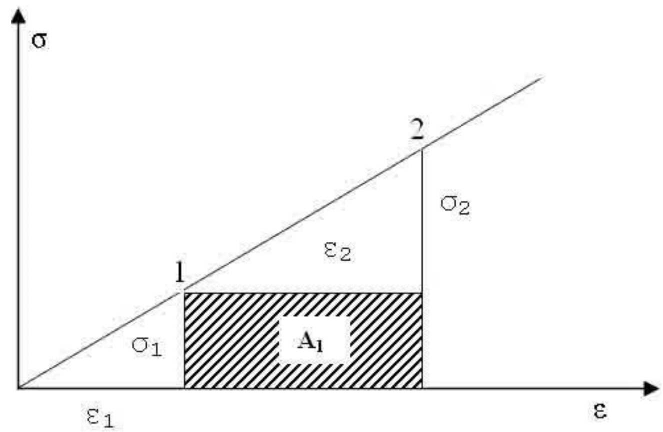
Имајући у виду да су тензори деформација $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$ и тензор напона $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ симетрични, тензор $\boldsymbol{S_{ijkl}}$ такође мора бити симетричан (по пару индекса). На основу симетрије тензора деформација $\boldsymbol{\varepsilon_{ij}}$ следи да је:

$$S_{ijkl} = S_{jikl}$$

Односно на основу симетрије тензора напона $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ следи да је:

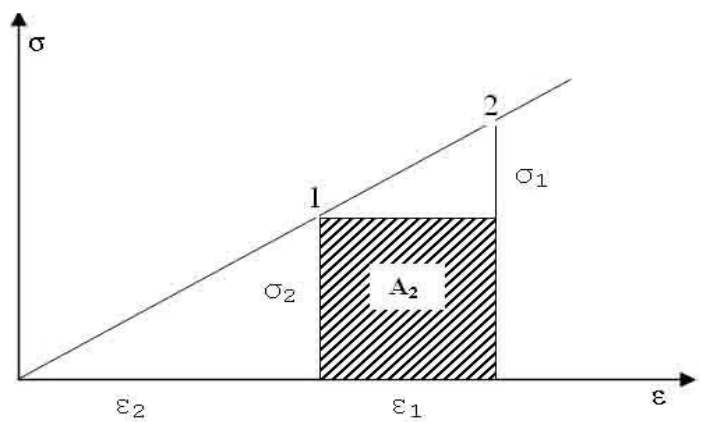
$$S_{ijkl} = S_{ijlk}$$

Под претпоставком да је веза између напона и деформација линеарна (линеарно еластично тело и деформације су мале), закон суперпозиције важи. Под овом претпоставком посматрају се два различита напонско деформациона стања. У првом случају деформацији $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ одговара напонско стање $\boldsymbol{\sigma_1}$, а затим се тело додатно деформише за деформацију ε_2 којој одговара додатни напон σ_2. Укупан напон услед деформација ε_2 и ε_1 приказан је на слици 3.3.



Слика 3.3. Укупан напон услед деформација ε_2 *и* ε_1

У другом случају тело је прво деформисано на величину ε_2, а затим додатно још за величину ε_1. Укупан напон услед деформација ε_1 и ε_2 приказан је на слици 3.4.



Слика 3.4. Укупан напон услед деформација ε_2 *и* ε_1

Укупан рад мора бити једнак у оба посматрана случаја, односно за тензор S_{ijkl} мора да важи:

$$S_{ijkl} = S_{klij} = S_{lkij} = S_{lkji}$$

На основу претходне анализе може се закључити да у општем случају малих деформација анизотропног материјала тензор S_{ijkl} има 21 независан коефицијент. Компоненте тангенцијалних напона морају бити симетричне, односно:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$
$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$
$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

Користећи се инжењерском нотацијом деформације клизања могу бити изражене у следећем облику:

$$\gamma_{12} = 2 \cdot \varepsilon_{12} \quad \gamma_{12} = \gamma_{21}$$
$$\gamma_{23} = 2 \cdot \varepsilon_{23} \quad \gamma_{23} = \gamma_{32}$$
$$\gamma_{31} = 2 \cdot \varepsilon_{31} \quad \gamma_{31} = \gamma_{13}$$

Хуков закон може се представити и у следећем облику.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1112} & 2S_{1123} & 2S_{1131} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2212} & 2S_{2223} & 2S_{2231} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3312} & 2S_{3323} & 2S_{3331} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1212} & 4S_{1223} & 4S_{1231} \\ 2S_{2311} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2312} & 4S_{2323} & 4S_{2331} \\ 2S_{3111} & 2S_{3122} & 2S_{3133} & 4S_{3312} & 4S_{3123} & 4S_{3131} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}$$

Односно уводећи ознаке:

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2, \sigma_{33} = \sigma_3$$
$$\sigma_{23} = \tau_{23} = \sigma_4 = \tau_4$$
$$\sigma_{31} = \tau_{31} = \sigma_5 = \tau_5$$
$$\sigma_{12} = \tau_{12} = \sigma_6 = \tau_6$$
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \varepsilon_{33} = \varepsilon_3$$
$$2 \cdot \varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \varepsilon_4 = \gamma_4$$
$$2 \cdot \varepsilon_{31} = \gamma_{31} = \varepsilon_5 = \gamma_5$$
$$2 \cdot \varepsilon_{21} = \gamma_{21} = \varepsilon_6 = \gamma_6$$

$$C_{1111} = C_{11}, C_{1122} = C_{12}, C_{1133} = C_{13}, C_{1123} = C_{14}, C_{1131} = C_{15}, C_{1112} = C_{`16}$$
$$C_{2211} = C_{21}, C_{2222} = C_{22}, C_{2233} = C_{23}, C_{2223} = C_{24}, C_{2231} = C_{25}, C_{2212} = C_{26}$$
$$C_{3311} = C_{31}, C_{3322} = C_{32}, C_{3333} = C_{33}, C_{3323} = C_{34}, C_{3331} = C_{35}, C_{3312} = C_{36}$$
$$C_{2311} = C_{4`}, C_{2322} = C_{42}, C_{2333} = C_{43}, C_{2323} = C_{44}, C_{2331} = C_{45}, C_{2312} = C_{46}$$
$$C_{3111} = C_{51}, C_{3122} = C_{52}, C_{3133} = C_{53}, C_{3123} = C_{54}, C_{3131} = C_{55}, C_{3112} = C_{56}$$
$$C_{1211} = C_{61}, C_{1222} = C_{62}, C_{3333} = C_{63}, C_{1223} = C_{64}, C_{1231} = C_{65}, C_{1212} = C_{66}$$

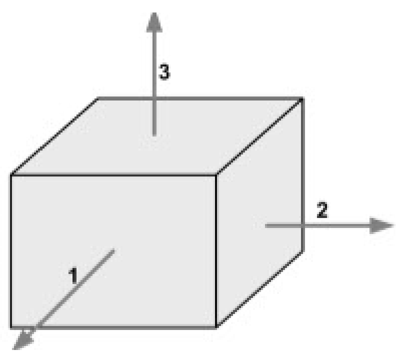
Претходна релација постаје:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

Што представља генералисани Хуков закон за анизотропне материјале, 36 еластичних коефицијената, од којих је 21 независан.

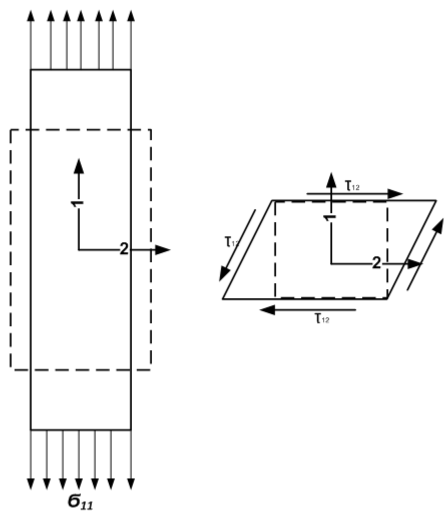
3.3. Ортотропни материјали

Уколико материјал поседује три међусобно управне материјалне осе, назива се ортотропним материјалом.



Слика 3.5. Материјалне осе ортотропног материјала

Уколико је овакав материјал оптерећен дуж материјалних оса, као на слици,



Слика 3.6. Оптерећење ортотропног материјала дуж материјалних оса

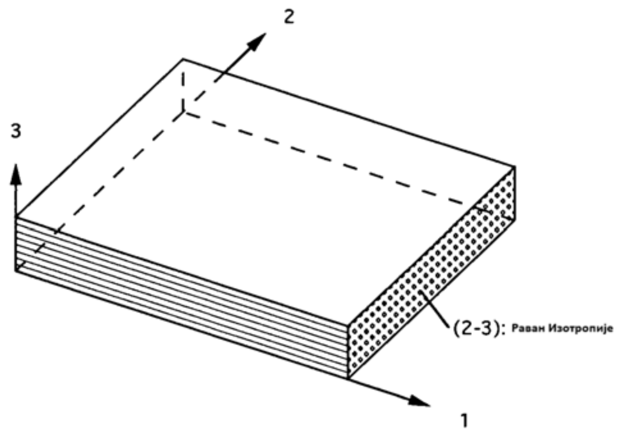
нормални напони изазивају уздужне деформације, а тангенцијални промену облика, па на основу тога следи да је:

$$
\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}
$$

Односно, код ортотропних материјала постоји девет независних еластичних коефицијената.

3.4. Трансверзално изотропни материјал

Ортотропни материјал сматра се трансверзално изотропним уколико је једна од његових равни симетрије и раван изотропије, односно у свакој тачки постоји раван у чијој су особине материјала исте у сваком правцу.

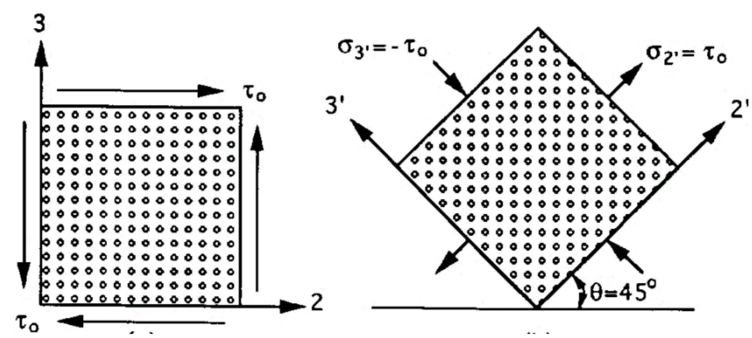


Slika 3.7. Положај равни изотропије трансверзално изотропних материјала

Сходно томе, за материјалне осе приказане на претходној слици, где је раван 23 заправо и раван изотропије, следи да индекси еластичних коефицијената, 2 и 3, могу бити замењени односно да је:

$$C_{12} = C_{13}$$
$$C_{22} = C_{33}$$
$$C_{55} = C_{66}$$

Анализирајући ротацију материјалног координатног система (трансформацију)



Slika 3.8. Трансформација материјалног координатног система

следи да се коефицијент ***C***$_{44}$ може изразити преко осталих коефицијената трансверзално изотропног материјала, односно да он није независан.

$$C_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}$$

Тако се Хуков закон за трансверзално изотропне материјале своди на следеће:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_4\\ \tau_5\\ \tau_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_4\\ \gamma_5\\ \gamma_6\end{bmatrix}$$

Односно ако су деформације линеарне функције напона, за трансверзално изотропан материјал, веза деформација и напона дата је следећом релацијом:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_4\\ \gamma_5\\ \gamma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\left(S_{22}-S_{23}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_4\\ \tau_5\\ \tau_6\end{bmatrix}$$

Дакле, код ове врсте материјала постоји само пет независних еластичних коефицијената.

Уколико су особине материјала у свим правцима исте, материјал сматрамо изотропним. За ове материјале важе следеће релације:

$$\begin{aligned}&C_{11}=C_{22}=C_{33}\\ &C_{12}=C_{13}=C_{21}=C_{23}=C_{31}=C_{32}\\ &C_{15}=C_{26}=C_{34}\\ &C_{16}=C_{14}=C_{25}=C_{24}=C_{35}=C_{36}=0\\ &C_{51}=C_{62}=C_{43}=0\\ &C_{42}=C_{63}=C_{41}=C_{53}=C_{61}=C_{52}=0\\ &C_{44}=C_{55}=C_{66}\\ &C_{45}=C_{46}=C_{56}=C_{54}=C_{55}=C_{64}=0\end{aligned}$$

3.5. Ортотропски материјали при раванском стању напона

На основу дефиниције раванског (дводимензионалног) стања напона, за ортотропске материјале у координатном систему 1, 2, 3 имаћемо следеће зависности:

$$\sigma_3 = 0$$
$$\tau_{23} = \tau_4 = 0$$
$$\tau_{13} = \tau_5 = 0$$

Хуков закон тако може бити написан у следећем облику:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

Односно у развијеном облику:

$$\sigma_1 = C_{11} \cdot \varepsilon_1 + C_{12} \cdot \varepsilon_2 + C_{13} \cdot \varepsilon_3$$
$$\sigma_2 = C_{12} \cdot \varepsilon_1 + C_{22} \cdot \varepsilon_2 + C_{23} \cdot \varepsilon_3$$
$$0 = C_{13} \cdot \varepsilon_1 + C_{23} \cdot \varepsilon_2 + C_{33} \cdot \varepsilon_3$$
$$\gamma_4 = \gamma_5 = 0$$
$$\tau_{66} = C_{66} \cdot \gamma_6$$

Изражавајући ***ε₃*** следи:

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}} \right) \cdot \varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \cdot \varepsilon_2 = Q_{11} \cdot \varepsilon_1 + Q_{12} \cdot \varepsilon_2$$
$$\sigma_2 = \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}} \right) \cdot \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}} \right) \cdot \varepsilon_2 = Q_{12} \cdot \varepsilon_1 + Q_{22} \cdot \varepsilon_2$$
$$\tau_6 = C_{66} \cdot \gamma_6 = Q_{66} \cdot \gamma_6$$

Односно у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

При чему је:

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3} \cdot C_{j3}}{C_{33}} \qquad (i, j = 1, 2, 6)$$

Инверзна релација (деформације у функцији напона) може бити написана у облику:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

На основу овога следи да се код ортотропских материјала при раванском стању напона веза између напона и деформација може изразити преко четири независна еластична коефицијента.

Материјал	Број независних еластичних коефицијената
Анизотропан	81
Анизотропан (са симетријом)	36
Анизотропан (енергетски услови)	21
Ортотропан	9
Ортотропан трансверзално изотропан	5
Ортотропан транс. из. при раванском стању напона	4
Изотропан	2