1. МИКРОМЕХАНИКА КОМПОЗИТНИХ МАТЕРИЈАЛА

4.1. Увод

Веза напона и деформација танке композитне ламине са влакнима усмереним у једном правцу при раванском стању напона може бити окарактерисана са четири независна еластична коефицијента, као што су Јангови модули еластичности у правцу влакана ($\boldsymbol{E_{11}}$) и нормалним на правац влакана ($\boldsymbol{E_{22}}$), модулом клизања у равни ламине ($\boldsymbol{G_{12}}$) и Поасоновим коефицијентом ($\boldsymbol{\nu_{12}}$). Ове коефицијенте можемо изразити у функцији еластичних коефицијената фаза (матрице и влакана) и њихових удела у композиту.

Зависност напона и деформација, као што је то било раније показано, изражена је преко генералисаног Хуковог закона у следећем облику:

$$\left[\sigma_i\right]=\left[Q_{ij}\right]\left[\varepsilon_i\right]$$

На основу претходне релације, деформације могу бити изражене:

$$\left[Q_{ij}\right]^{-1}\left[\sigma_i\right]=\left[Q_{ij}\right]^{-1}\left[Q_{ij}\right]\left[\varepsilon_i\right]$$

$$\left[Q_{ij}\right]^{-1}\left[Q_{ij}\right]\left[\varepsilon_i\right]=\left[Q_{ij}\right]^{-1}\left[\sigma_i\right]$$

$$\left[I\right]\left[\varepsilon_i\right]=\left[Q_{ij}\right]^{-1}\left[\sigma_i\right]$$

$$\left[\varepsilon_i\right]=\left[S_{ij}\right]\left[\sigma_i\right]$$

Матрица ***[S_{ij}]*** односно ***[Q_{ij}]*** изражене преко еластичних инжењерских константи, за ламину са усмереним неиспрекиданим влакнима за случај раванског стања напона у правцима материјалних оса ламине (правац 1 – правац простирања влакана и правац 2 – правац попречно на правац простирања влакана) узима следећи облик:

$$\left[S_{ij}\right]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1} & -\dfrac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\dfrac{\nu_{12}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

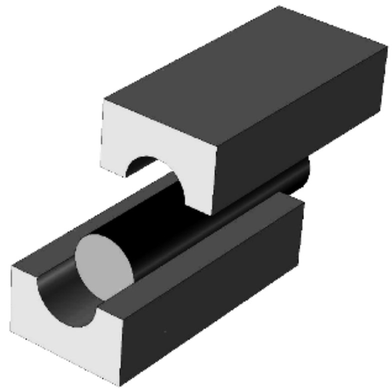
Анализирајући карактеристике ламина на нивоу микромеханике сви еластични коефицијенти могу бити изражени у функцији параметара фаза односно за сваки еластични коефицијент $\boldsymbol{C_{ij}}$ може у општем случају бити изражен као:

$$Q_{ij}=f_1\left(E_f,E_m,V_f,V_m,\nu_m,\nu_f,S_i,A....\right)$$

односно,

$$S_{ij}=f_2\left(E_f,E_m,V_f,V_m,\nu_m,\nu_f,S_i,A....\right).$$

У претходној релацији величине $\boldsymbol{E_f}$, $\boldsymbol{E_m}$, $\boldsymbol{V_f}$, $\boldsymbol{V_m}$, $\boldsymbol{S_i}$ и $\boldsymbol{A}$ представљају геометријске параметре расподеле влакана у матрици (модули еластичности влакана и матрице, запремински удели фаза композита, геометријски распоред влакана у матрици, величина попречног пресека влакана…).



Слика 4.1. Микромеханички модел

4.2. Запремински и масени удели фаза у композитној ламини

Запремина ламине може бити изражена:

$$V_F + V_M = V_C$$

Делећи претходни израз са укупном запремином претходни израз постаје:

$$\frac{V_F}{V_C} + \frac{V_M}{V_C} = V_f + V_m = 1,$$

при чему бездимензионе величине $\boldsymbol{V_f}$ и $\mathbf{V}_{\boldsymbol{m}}$ представљају запреминске уделе влакана и матрице у композиту. На основу претходног израза следи да запремина композита у функцији запремина фаза и њихових запреминских удела може бити изражена на следећи начин:

$$\rho_c = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m$$

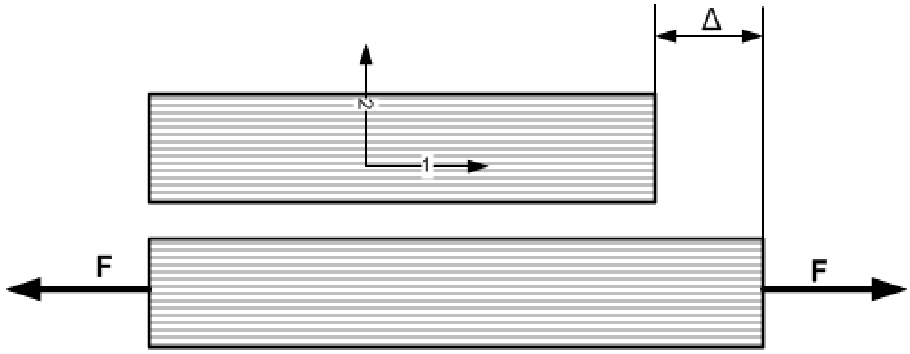
односно,

$$V_f = \frac{\dfrac{M_f}{\rho_f}}{\dfrac{M_f}{\rho_f} + \dfrac{M_m}{\rho_m}} \Rightarrow M_f = \frac{V_f \rho_f}{V_f \rho_f + Vm \rho_m},$$

при чему су $\boldsymbol{M_f}$ и $\boldsymbol{M_m}$ масе влакана и матрице у композиту.

4.3. Одређивање модула еластичности у правцу простирања влакана

Посматрамо ламину затегнуту у правцу простирања влакана (правац 1).



Слика 4.2. Одређивање модула еластичности у правцу простирања влакана

Укупна сила која делује на ламину (затежућа сила у правцу влакна) оптерећује матрицу и влакна, па може бити написано:

$$F = F_f + F_m,$$

при чему је су $\mathbf{F}_f$, $\mathbf{F}_m$ силе у матрици и влакну.

Деформације ламине у влакнима и матрици морају бити једнаке, па на основу тога следи:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m = \varepsilon_f$$

Односно укупан нормални напон у ламини, влакнима и матрици правцу влакана може бити изражен:

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c, \sigma_f = E_f \varepsilon_f, \sigma_m = E_m \varepsilon_m$$

Укупна затежућа сила у композитној ламини изражена преко деформација, површине попречног пресека и модула еластичности влакана и матрице:

$$E_c \varepsilon_c A_c = E_f \varepsilon_f A_f + E_m \varepsilon_m A_m$$

Изражавајући модуо еластичности у правцу влакана (правац 1), у функцији модула еластичности и димензија (попречних пресека) фаза композитне ламине, добија се:

$$E_c = E_f \left(\frac{A_f}{A_c} \right) + E_m \left(\frac{A_m}{A_c} \right),$$

односно претходна релација изражена у функцији запреминских удела фаза композита, и обележавајући модуо еластичности композита у правцу влакна индексом **1** следи:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m$$

Претходно добијена релација омогућује нам да познајући карактеристике фаза у композиту (модуле еластичности влакана и матрице), као и њихове запреминске уделе у ламини, са великом тачношћу одредимо модуо еластичности целог композита (ламине) у правцу простирања влакана. Ова релација позната је под називом „Правило мешања” (*Rule of mixtures – ROM*) односно модел Војта (*Voigt model*). Потребно је напоменути да се на материјалном нивоу нека често коришћена влакна при производњи композитних структура понашају изразито ортотропно, па је на основу тога модуо еластичности влакана који се користи у моделу Војта, модуо у правцу самог влакна, односно претходна релација поприма облик:

$$E_1 = E_f^1 V_f + E_m V_m$$

У претходној релацији $\boldsymbol{E_f^1}$ представља модуо еластичности влакна у правцу самог влакна.

Вредности модула еластичности за позната и често коришћена влакна при изградњи композитних конструкција као и за неке матрице на бази епоксидних смола дате су следећим табелама.

Табела 4.1. Модули еластичности влакана и матрица на бази епоксидних смола

	AS4	**T300**	**Е-стакло**	**С-стакло**
E^f_1 GPa	225	230	80	86
E^f_2 GPa	15	15	80	86
G^f GPa	15	15	3,33	-

	3501-6	**БСЛ914**	**ЛУ556**	**МУ750**
Em GPa	4,2	4,0	3,35	3,35

Експерименти су показали задовољавајуће поклапање са аналитички добијеним резултатима модела правила мешања за одређивање модула еластичности у правцу простирања влакана (правац 1). Побољшани модел у односу на модел Војта (правило мешања) предложили су Хашин и Розен (*Hashin and Rosen*). Према овом моделу модуо еластичности двофазне композитне ламине, у правцу простирања влакана, а у зависност од карактеристика самих фаза (влакна и матрице) може бити одређен коришћењем следеће једначине:

$$E_1 = E_f^1 V_f + E_m V_m + \frac{4 V_f V_m \left(\nu_f - \nu_m\right)^2}{\dfrac{V_f}{K_m} + \dfrac{1}{G_m} + \dfrac{V_m}{K_f}}$$

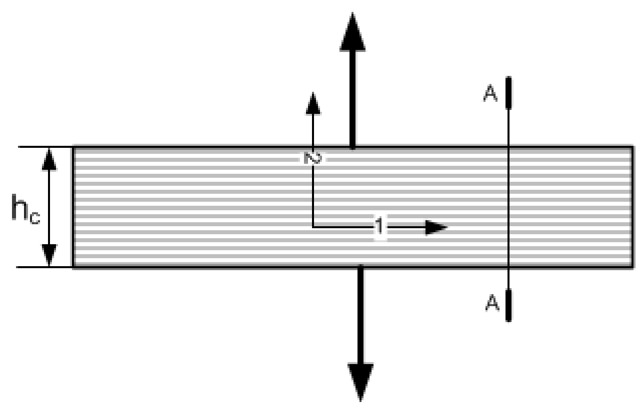
при чему је:

$$K_f = \frac{E_f}{2\left(1-2\nu_f\right)\left(1+2\nu_f\right)}$$

$$K_f = \frac{E_m}{2\left(1-2\nu_m\right)\left(1+2\nu_m\right)}$$

4.4. Одређивање модула еластичности нормалног на правац простирања влакана

Посматрамо ламину затегнуту попречно на правац влакана (правац 2), као што приказује следећа слика:



Slika 4.3. Одређивање модула еластичности нормалног на правац простирања влакана

За овакав случај оптерећења, посматрајући одређени попречни пресек ламине, важе следеће релације:

$$\sigma_2 = \sigma_f = \sigma_m$$

Тада деформације у ламини могу бити изражене:

$$\delta_2 = \delta_f + \delta_m \Rightarrow \varepsilon_2 h_c = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m$$

Односно на основу претходних релација следи:

$$\sigma_2 = E_{cT}\varepsilon_{cT}, \sigma_f = E_f \varepsilon_f, \sigma_m = E_m \varepsilon_m$$

Напон у ламини може, дакле, бити изражен:

$$\frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_f}{E_f}\frac{h_f}{h_c} + \frac{\sigma_m}{E_m}\frac{h_m}{h_c}$$

На основу претходне везе, модуо еластичност композитне ламине, у функцији запреминских удела фаза и модула еластичности влакана и матрице, може бити изражен:

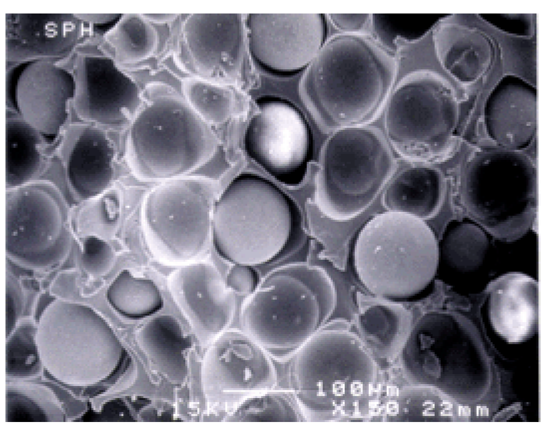
$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \Rightarrow E_2 = \frac{E_f E_m}{V_f E_m + V_m E_f}$$

Узимајући у обзир и ортотропне особине влакана, следи да је модуо еластичности композитне ламине:

$$E_2 = \frac{E_2^f E_m}{V_f E_m + V_m E_2^f}$$

Као и у претходном случају за модуо еластичности у правцу простирања влакана, добијена релација представља модел Војта (*Voigt model*) односно инверзног правила мешања (*inverse Rule of Mixtures*), помоћу којег је, уколико су нам познате карактеристике влакана и матрице, као и запремински удели фаза у композиту, потребно одредити вредност модула еластичности композитне ламине попречно на правац простирања влакана (правац 1).

Вредности за модул еластичности попречно на правац простирања влакана добијене на основу претходно изведене релације (инверзно правило мешања) показују ниже вредности у односу на експериментално добијене резултате. Разлог томе је што модел инверзног правила мешања не узима у обзир утицаје интерфазе, односно фазе која се јавља на интерфејсу влакана и матрице током процеса полимеризације.



Слика 4.4. Интерфаза у композитном материјалу

За добијање тачнијих резултата за модуо еластичности попречно на правац простирање влакана могу се користити и други микромеханички модели и представљени су у даљем тексту.

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\dfrac{V_f}{E_2^f} + \dfrac{\eta V_m}{E_m}}{V_f + \eta V_m}$$

Претходна једначина представља модификовану теорију инверзног правила мешања. Коефицијент $\boldsymbol{\eta}$ представља коефицијент расподела напона између влакана и матрице и задовољава следећу релацију:

$$0 \leq \eta \leq 1$$

У практичној примени коефицијент η узима вредности од 0,4 до 0,6, што углавном зависи од врсте влакана која се користе у композитној ламини и одређују се експериментално.

Уколико експериментални подаци за коефицијент расподеле напона $\boldsymbol{\eta}$ нису познати, инверзно правило мешања за одређивање модула еластичности $\boldsymbol{E_2}$ (модуо попречно на правац простирања влакана) може бити представљено следећом једначином:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\eta^f V^f}{E_2^f} + \frac{\eta^m V^m}{E_m}$$

при чему су коефицијенти $\boldsymbol{\eta_f}$ и $\boldsymbol{\eta_m}$ представљени следећим једначинама:

$$\eta^f = \frac{E_1^f V_f + \left[\left(1 - \nu_{12}^f \nu_{21}^f\right) E_m + \nu_m \nu_{21}^f E_1^f\right] V_m}{E_1^f V_f + E_m V_m}$$

$$\eta^m = \frac{\left[\left(1 - \nu_m^2\right) E_1^f - \left(1 - \nu_m \nu_{12}^f E_m\right) V^f + E_m V_m\right]}{E_1^f V_f + E_m V_m}$$

Вредности Поасоновог коефицијента (*Poisson*) за неке често кориштене фазе у композитним конструкцијама приказане у следећој табели.

Претходна релација може бити искоришћена за одређивање модула $\boldsymbol{E_2}$ композитне ламине у случајевима када није позната вредност параметра $\boldsymbol{\eta}$ (коефицијент расподеле напона).

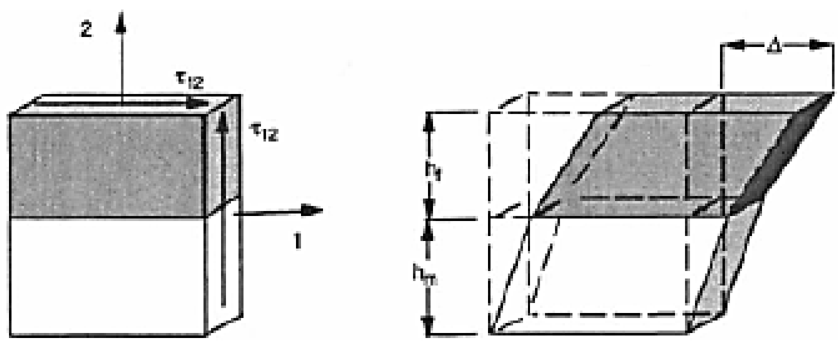
Табела 4.2. Вредности Поасоновог коефицијента за неке фазе композитне ламине (епокси смола, стаклено и карбонско влакно)

Материјал	γ_{12}
Епокси матрица (Epoxy matrix)	0,350

Стаклено влакно (Glass fiber)	0,220
Угљенично влакно (Carbon fiber)	0.279

4.5. Одређивање модула клизања композитне ламине

С циљем одређивања модула клизања $\boldsymbol{G_{12}}$ композитне ламине, а у функцији запреминског односа компонентних фаза као и модула клизања самих компоненти (влакна $\boldsymbol{G_{f12}}$ и матрице $\boldsymbol{G_m}$), посматрајмо следећи модел који представља интерфејс самог влакна и матрице који је оптерећен смичућим силама (слика 4.5).



Слика 4.5. Одређивање модула клизања композитне ламине

На основу дефиниције деформације клизања у равни 1-2 може бити написано:

$$\gamma_{12} = \frac{\Delta}{h_f + h_m}$$

Померање $\boldsymbol{\Delta}$ дато је следећим изразом, а у функцији геометрије и компонентних деформација клизања:

$$\Delta = h_f \gamma_{12}^f + h_m \gamma_m$$

На основу претходних израза, узимајући у обзир и запреминске уделе фаза композитног ламината, деформација клизања једнака је:

$$\gamma_{12} = \left(\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \right) \tau_{12}$$

Модуо клизања композитног ламината дат је следећом релацијом:

$$G_{12} = \frac{G_{12}^f G_m}{V_f G_m + V_m G_{12}^f}$$

Модификована теорија мешања (*Modified theory of mixtures – MROM*) за модуо G_{12} има следећи облик:

$$\frac{1}{G_{12}}=\frac{\dfrac{V_f}{G_{12}^f}+\dfrac{\eta' V_m}{G_m}}{V_f+\eta' V_m}$$

Коефицијент η' може имати вредности између 0 и 1, а вредност η = 0,6 је уобичајена за стаклена и карбонска влакна.

Модел на основу теорије еластичности (*Elasticity model*) модуо G_{12} у функцији од карактеристика фаза (модула клизања влакана, матрице као и запреминских удела матрице и влакана у композитној ламини) које сачињавају композит представља у следећем облику:

$$G_{12}=G_m\left[\frac{\left(G_m+G_{12}^f\right)-V^f\left(G_m-G_{12}^f\right)}{\left(G_m+G_{12}^f\right)+V^f\left(G_m-G_{12}^f\right)}\right]$$

Према моделу Хашин-Росена (*Hashin-Rosen model*) модуо клизања композитне ламине може се одредити према следећој релацији:

$$G_{12}=G_m\frac{G_{12}^f\left(1+V_f\right)+G_mV_m}{G_{12}^fV_m+G^m\left(1+V_f\right)}$$

Односно, према моделу Чамиса (*Chamis model*) модуо клизања композитне ламине износи:

$$G_{12}=\frac{G_m}{1-\sqrt{V_f}\left(1-\dfrac{G_m}{G_{12}^f}\right)}$$

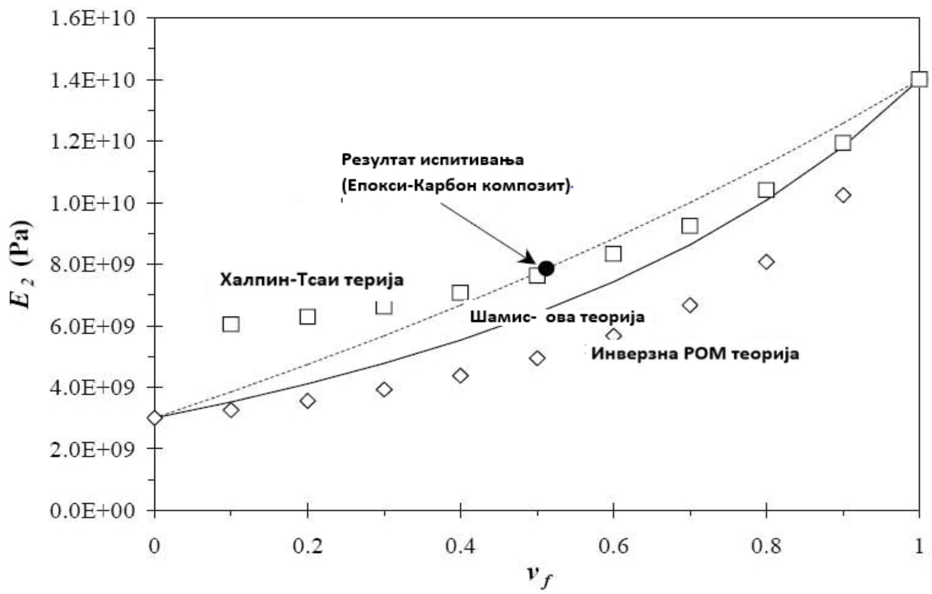
Према моделу Халпин-Цај (Halpin Tsai) модуо клизања једнак је:

$$G_{12}=G_m\left(\frac{1+2\cdot\xi\cdot V_f}{1-\xi\cdot V_f}\right)$$

при чему је коефицијент ξ једнак:

$$\xi=\frac{\dfrac{G_{12}^f}{G_m}-1}{\dfrac{G_{12}^f}{G_m}+2}$$

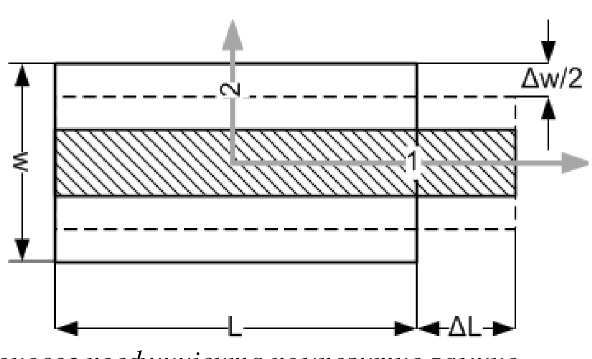
Упоредни резултати за различите теорије којима је могуће одредити модуо клизања композитног ламината приказане су на слици 4.6:



Слика 4.6. Упоредни резултати за различите теорије којима је могуће одредити модуо клизања композитног ламината

4.6. Одређивање Поасоновог коефицијента композитне ламине

Полазећи од дефиниције Поасоновог коефицијената за танку композитну ламину, који представља однос попречних и аксијалних деформација, Поасонов коефицијент за ламину може бити изражен преко Поасонових коефицијената влакана и матрице као и њихових запреминских удела у композитној ламини, на следећи начин:



Одређивање Поасоновог коефицијента композитне ламине