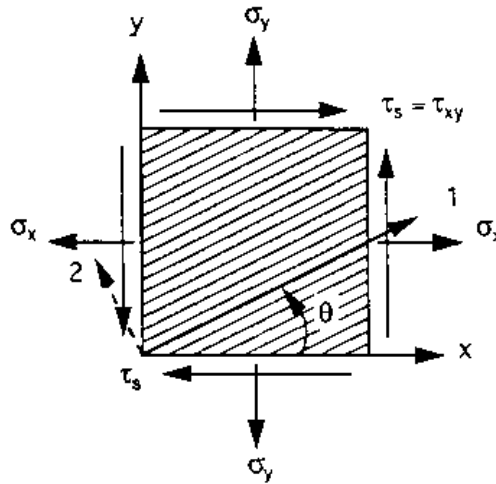


## Трансформације напона и деформација композитне ламине

У општем случају правац дејства оптерећења не поклапа се са правцима главних материјалних оса ламине.



Слика 3.1. Правац деловања оптерећења у односу на материјалне осе трансверзално изотропног материјала

Односно може бити написано:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_6 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_s \end{bmatrix}$$

Матрица Т је матрица трансформације која повезује напоне (деформације) у материјалном координатом систему са напонима (деформацијама) са координатним системом који одговара правцу дејства оптерећења.

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Уводећи ознаке  $m = \cos \theta$  и  $n = \sin \theta$  матрица трансформације има следећи облик:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}$$

Тако да је,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_s \end{bmatrix} [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_6 \end{bmatrix}$$

При чему је инверзна матрица трансформације

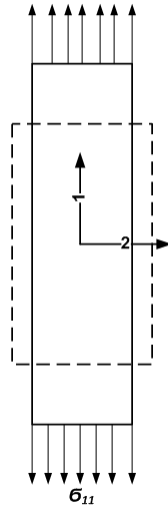
$$[T] = [T(-\theta)] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}$$

### 3.7. Трансформације еластичних коефицијената композитне ламине

На основу релација које повезују напоне и деформације танке композитне ламине при раванском стању напона

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

слиди да ако је ламина оптерећена само на затезање (или притисак) у правцу главних материјалних оса, уздужне деформације и деформације клизања нису спрегнуте.



Слика 3.2. Ламина оптерећена у правцу главних материјалних оса

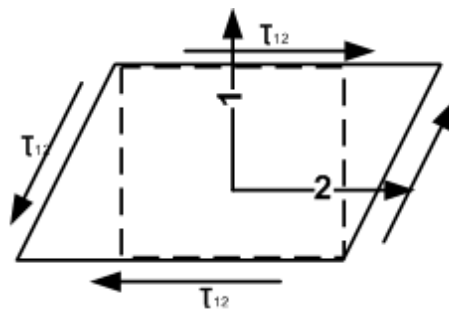
Односно у развијеном облику,

$$\sigma_1 = Q_{11} \cdot \varepsilon_1 + Q_{12} \cdot \varepsilon_2$$

$$\sigma_2 = Q_{12} \cdot \varepsilon_1 + Q_{22} \cdot \varepsilon_2$$

$$\tau_6 = Q_{66} \cdot \gamma_6$$

Слично, уколико је ламина оптерећена смицање дуж главних оса, појавиће се само деформације клизања.



Слика 3.3. Ламина оптерећена на смицање

Али у општем случају оптерећење не делује дуж главних оса, па у том случају важи:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} &= [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \\ &= [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_6 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

при чему је,

$$\begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 2Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 2Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & 2Q_{ss} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} [T]$$

Односно у развијеном облику:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{yy} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{xy} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66} \\ Q_{xs} &= m^3 n Q_{11} - m n^3 Q_{22} + (m n^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(m n^3 - m^3 n) Q_{66} \\ Q_{ys} &= m n^3 Q_{11} + m^3 n Q_{22} - (m^3 n - m n^3) Q_{12} + 2(m^3 n - m n^3) Q_{66} \\ Q_{ss} &= m^2 n^2 Q_{11} - m^2 n^2 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 2(m^2 - n^2)^2 Q_{66} \end{aligned}$$

Коефицијенте еластичности за осе  $x$ ,  $y$ , можемо добити на сличан начин полазећи од релације:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}$$

што се своди на следећи облик:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_s \end{bmatrix} &= [T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_6 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \\ &= [T]^{-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_6 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}S_{66} \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

па су еластични коефицијенти матрице еластичности за осе  $x$  и  $y$  а у функцији еластичних коефицијената за главне материјалне осе дати следећим изразима.

$$\begin{aligned} S_{xx} &= m^4 S_{11} + n^4 S_{22} - 2m^2 n^2 S_{12} + m^2 n^2 S_{66} \\ S_{yy} &= n^4 S_{11} + m^4 S_{22} - 2m^2 n^2 S_{12} + m^2 n^2 S_{66} \\ S_{xy} &= m^2 n^2 S_{11} + m^2 n^2 S_{22} + (m^4 + n^4) S_{12} - m^2 n^2 S_{66} \\ S_{xs} &= m^3 n S_{11} - 2mn^3 S_{22} + 2(mn^3 - m^3 n) S_{12} - (mn^3 - m^3 n) S_{66} \\ S_{ys} &= 2mn^3 S_{11} - 2m^3 n S_{22} + 2(m^3 n - mn^3) S_{12} - (m^3 n - mn^3) S_{66} \\ S_{ss} &= 4m^2 n^3 S_{11} - 4m^2 n^2 S_{22} - 8m^2 n^2 S_{12} - (m^2 - n^2)^2 S_{66} \end{aligned}$$

### 3.8. Еластични коефицијенти у функцији инжењерских константи

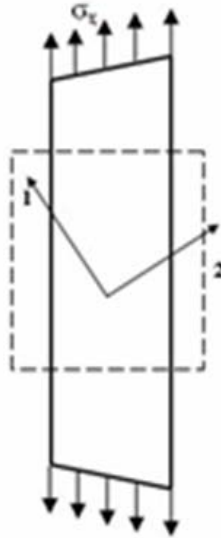
Полазећи од везе напона и деформација за раванско стање напона у правцу главних оса следи:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

За ламину оптерећену само нормалним напонима у правцу  $x$  осе важи:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x}, \varepsilon_y = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x, \gamma_s = \frac{\eta_{xs}}{E_x} \sigma_x$$

при чему је  $\eta_{xc}$  коефицијент спреге између деформација клизања у равни услед дејства нормалних напона у правцу  $x$  осе.



Слика 3.4. Оптерећење ламине у произвољном правцу

За ламину оптерећену само нормалним напонима у правцу  $y$  осе важи:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_y, \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y}, \gamma_s = \frac{\eta_{ys}}{E_y} \sigma_y$$

Односно, уколико је ламина оптерећена смичућим напонима у равни у правцу оса  $x, y$ , следи:

$$\varepsilon_x = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \tau_s, \varepsilon_y = \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \tau_s, \gamma_s = \frac{\tau_s}{G_{xy}}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_{xs}}{E_x} & \frac{\eta_{ys}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}$$

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \Rightarrow \frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} = \frac{E_x}{E_y}$$

$$\frac{\eta_{xs}}{E_x} = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} \Rightarrow \frac{\eta_{xs}}{\eta_{sx}} = \frac{E_x}{G_{xy}}$$

$$\frac{\eta_{ys}}{E_y} = \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} \Rightarrow \frac{\eta_{ys}}{\eta_{sy}} = \frac{E_y}{G_{xy}}$$

$$\frac{1}{E_x} = \frac{m^2}{E_1}(m^2 - n^2\nu_{12}) + \frac{n^2}{E_2}(n^2 - m^2\nu_{21}) + \frac{m^2n^2}{G_{12}}$$

$$\frac{1}{E_y} = \frac{n^2}{E_1}(n^2 - m^2\nu_{12}) + \frac{m^2}{E_2}(m^2 - n^2\nu_{21}) + \frac{m^2n^2}{G_{12}}$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{4m^2n^2}{E_1}(1 - \nu_{12}) + \frac{4m^2n^2}{E_2}(1 + \nu_{21}) + \frac{(m^2 - n^2)^2}{G_{12}}$$

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{2mn}{E_1}(m^2\nu_{12} - n^2) + \frac{n^2}{E_2}(n^2\nu_{21} - m^2) + \frac{m^2n^2}{G_{12}}$$

$$\frac{\eta_{xs}}{E_x} = \frac{\eta_{sx}}{G_{xy}} = \frac{2mn}{E_1}(m^2 - n^2\nu_{21}) - \frac{2mn}{E_2}(n^2\nu_{21} - m^2) + \frac{mn^3 - m^3n}{G_{12}}$$

$$\frac{\eta_{ys}}{E_y} = \frac{\eta_{sy}}{G_{xy}} = \frac{2mn}{E_1}(n^2 - m^2\nu_{21}) - \frac{2mn}{E_2}(m^2 - n^2\nu_{21}) + \frac{m^3n - mn^3}{G_{12}}$$

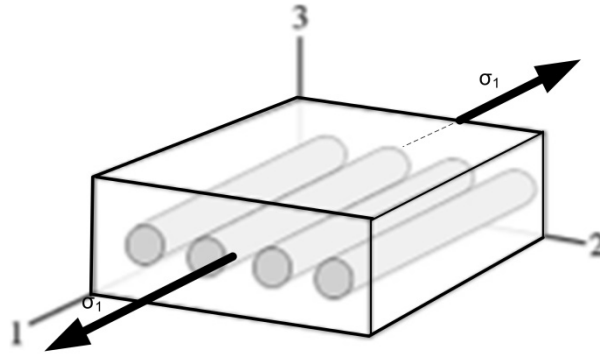
У даљем тексту приказана је веза између математичких и инжењерских еластичних коефицијената ортотропних материјала.

Хуков закон за ортотропне материјале у функцији математичких еластичних коефицијената представљен је следећом релацијом:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

Математички еластични коефицијенте ( $S_{ij}$ ) изразиће се у функцији инжењерских еластичних константи, односно Јанговог модула еластичности ( $E_{ij}$ ), Поасонових коефицијената ( $\nu_{ij}$ ) модула клизања ( $G_{ij}$ ).

Уколико је ортотропни материјал изложен само аксијалном напрезању само у правцу осе 1, онда из претходне релације важи:



Слика 3.5. Оптерећење у правцу влакана (правац 1)

$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1, \varepsilon_2 = S_{12}\sigma_1, \varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

На основу релација из отпорности материјала може бити написано:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{E_1}$$

такође,

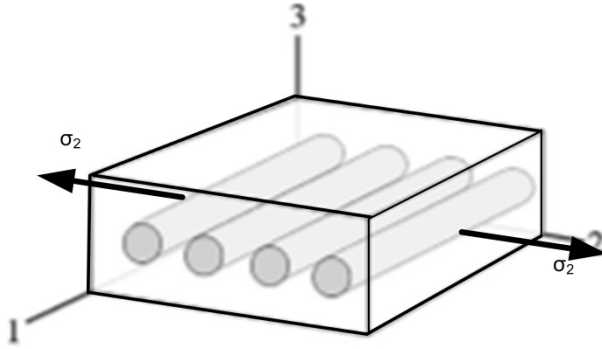
$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\frac{1}{E_1}\sigma_1} \Rightarrow \varepsilon_2 = -\frac{1}{E_1} \cdot \nu_{12} \cdot \sigma_1 \Rightarrow S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$$

као и,

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{E_1} \cdot \nu_{13} \cdot \sigma_1 \Rightarrow S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

Уколико је материјал оптерећен само дуж осе 2, имаћемо:





Слика 3.6. Оптерећење нормално на правац влакана (правац 2)

$$\varepsilon_1 = S_{12}\sigma_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2$$

$$\varepsilon_2 = S_{22}\sigma_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

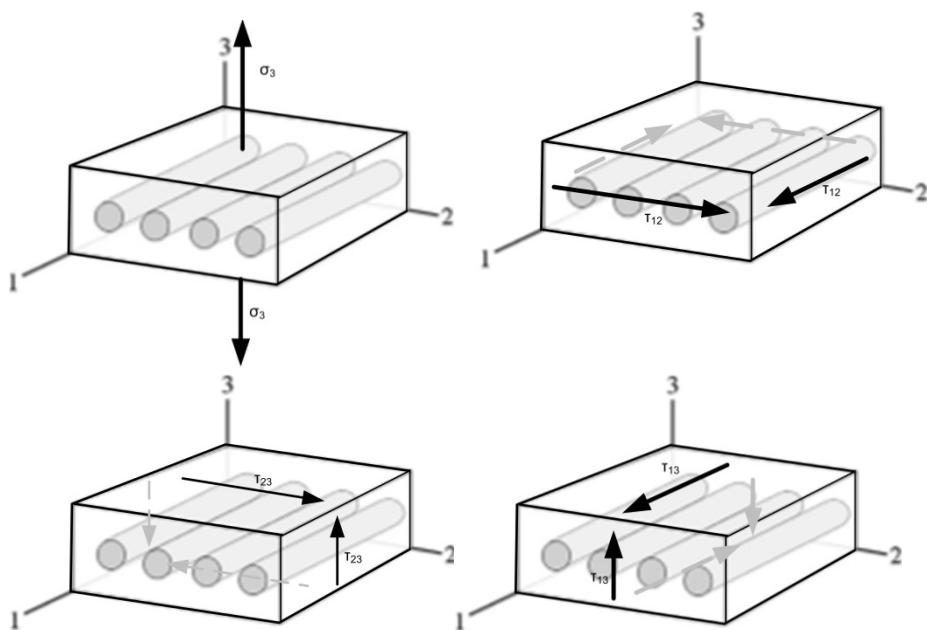
$$\varepsilon_3 = S_{23}\sigma_2 = -\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2$$

$$\gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0$$

тако да су еластични коефицијенти:

$$S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, S_{22} = \frac{1}{E_2}, S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$$

Користећи се сличним приступом за остале правце, Хуков закон, за ортотропне материјале, у функцији инжењерских еластичних коефицијената представљен је следећом релацијом:



Слика 3.7. Отерећење ламине у правцима 3, 1-2, 2-3, 1-3

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

На основу симетрије тензора напона и деформација јасно је да је:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2},$$

$$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3},$$

$$\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Уколико је материјал трансверзално изотропан са 2–3 равни изотропије, онда важи:

$$E_2 = E_3,$$

$$G_{12} = G_{13},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13}$$

### 3.9. Ламина при раванском стању напона

За танку ламину далеко од слободних ивица напонско стање може се разматрати као раванско, па у том случају Хуков закон може бити написан у следећем облику:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

Односно, деформације изражене као линеарне функције напона преко матрице еластичности:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix}$$

односно,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

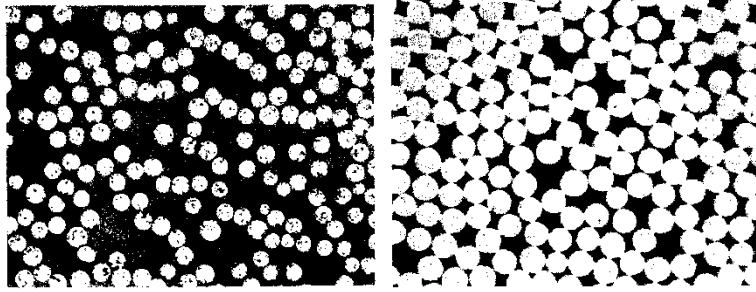
$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

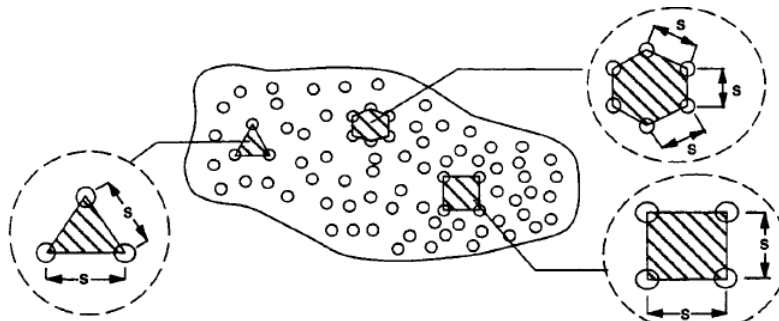
## Утицај геометријског распореда влакана у матрици на запремински удео

Микроскопски распоред влакана у матрици приказан је на следећим сликама:



Слика 4.1. Микроскопски распоред влакана

Распоред влакана у матрици може бити хексагоналан, троугаони и квадратни.



Слика 4.2. Распоред влакана у матрици

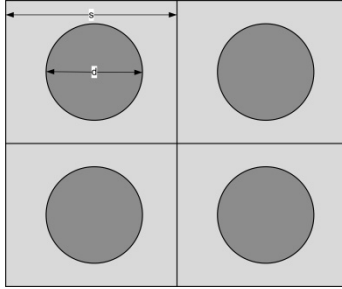
Запремински удео влакана у композитној ламини, за јединичну запремнину може бити изражен преко односа површина влакана и врсте распореда који влакна заузимају у матрици.

За квадратни распоред влакана у матрици важи:

$$V_f = \frac{A_{\text{влакно}}}{A_{\text{квадрат матрице}}}$$

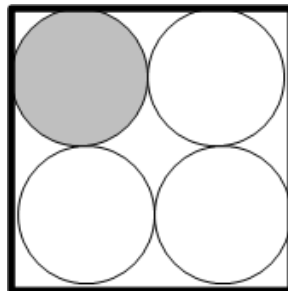
Рачунајући однос површина попречног пресека влакна и површине матрице (коју влакно у квадратном распореду заузима) следи да је запремински удео влакана у композитној ламини:

$$V_f = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot s^2}$$



Слика 4.3. Квадратни распоред влакана

односно у граничном случају за:  $s = d$



Слика 4.4. Гранични случај квадратног распореда влакана

Запремински удео влакана за квадратни распоред износи:

$$V_f = \frac{\pi}{4} \approx 0.785 \approx 78.5 \%$$

Добијена вредност запреминског удела влакана у композитној ламини, представља максимални оствариви удео влакана за квадратни начин слагања влакана.

На сличан начин могу бити израчунати и остали максимални запремински удели влакана за остале начине слагања.

Тако је за троугаони начин слагања максимални запремински удео влакана у матрици:

$$V_f = \frac{\pi \cdot d^2}{(2\sqrt{3}) \cdot s^2},$$

односно за хексагонални начин слагања:

$$V_f = \frac{\pi \cdot d^2}{(3\sqrt{3}) \cdot s^2}$$

У следећим табелама дате су механичке карактеристике за неке ламине са полимерним матрицама, влакна као и матрице на бази епоксидних смола.

Табела 4.4. Карактеристике композитних ламина

Fibre type	AS4	T300	E-glass 21xK43 Gevetex	Silenka E-Glass 1200tex
Matrix	3501-6 epoxy	BSL914C epoxy	LY556/HT907/ DY063 epoxy	MY750/HY917/ DY063 epoxy
Specification	Prepeg	Filament winding	Filament winding	Filament winding
Manufacturer	Hercules	DFVLR	DLR	DRA
Fibre volume fraction, $V_f$	0.60	0.60	0.62	0.60
Longitudinal modulus, $E_1$ (GPa)	126 <sup>a</sup>	138	53.48	45.6
Transverse modulus, $E_2$ (GPa)	11	11	17.7	16.2
In-plane shear modulus, $G_{12}$ (GPa)	6.6 <sup>a</sup>	5.5 <sup>a</sup>	5.83 <sup>a</sup>	5.83 <sup>a</sup>
Major Poisson's ratio, $\nu_{12}$	0.28	0.28	0.278	0.278
Through thickness Poisson's ratio, $\nu_{23}$	0.4	0.4	0.4	0.4
Longitudinal tensile strength, $X_T$ (MPa)	1950 <sup>b</sup>	1500	1140	1280
Longitudinal compressive strength, $X_c$ (MPa)	1480	900	570	800
Transverse tensile strength, $Y_T$ (MPa)	48	27	35	40
Transverse compressive strength, $Y_c$ (MPa)	200 <sup>b</sup>	200	114	145 <sup>b</sup>
In-plane shear strength, $S_{12}$ (MPa)	79 <sup>b</sup>	80 <sup>b</sup>	72 <sup>b</sup>	73 <sup>b</sup>
Longitudinal tensile failure strain, $\epsilon_{1T}$ (%)	1.38	1.087	2.132	2.807
Longitudinal compressive failure strain $\epsilon_{1C}$ (%)	1.175	0.652	1.065	1.754
Transverse tensile failure strain $\epsilon_{2T}$ (%)	0.436	0.245	0.197	0.246
Transverse compressive failure strain, $\epsilon_{2C}$ (%)	2.0	1.818	0.644	1.2
In-plane shear failure strain, $\gamma_{12a}$ (%)	2	4	3.8	4
Strain energy release rate, $G_{TC}$ (J m <sup>-2</sup> )	220	220	165	165
Longitudinal thermal coefficient, $\alpha_1$ (10 <sup>-6</sup> /°C)	-1	-1	8.6	8.6
Transverse thermal coefficient, $\alpha_2$ (10 <sup>-6</sup> /°C)	26	26	26.4	26.4
Stress free temperature (°C)	177	120	120	120
Curing			2 h at 120°C 2 h at 150°C	2 h at 90°C 1.5 h at 130°C 2 h at 150°C

Fibre type	AS4	T300	E-glass 21xK43 Gevetex	Silenka E-Glass 1200tex
Longitudinal modulus, $E_{f1}$ (GPa)	225	230	80	74
Transverse modulus, $E_{f2}$ (GPa)	15	15	80	74
In-plane shear modulus, $G_{f12}$ (GPa)	15	15	33.33	30.8
Major Poisson's ratio, $\nu_{f12}$	0.2	0.2	0.2	0.2
Transverse shear modulus, $G_{f23}$	7	7	33.33	30.8
Longitudinal tensile strength, $X_{fT}$ (MPa)	3350	2500	2150	2150
Longitudinal compressive strength, $X_{fc}$ (MPa)	2500	2000	1450	1450
Longitudinal tensile failure strain, $\epsilon_{f1T}$ (%)	1.488	1.086	2.687	2.905
Longitudinal compressive failure strain, $\epsilon_{f1C}$ (%)	1.111	0.869	1.813	1.959
Longitudinal thermal coefficient, $\alpha_{f1}$ (10 <sup>-6</sup> /°C)	-0.5	-0.7	4.9	4.9
Transverse thermal coefficient, $\alpha_{f2}$ (10 <sup>-6</sup> /°C)	15	12	4.9	4.9

\**Engineering Mechanics of Composite Materials* Isaac M. Daniel and Ori Ishai, Oxford University Press 1994.

Табела 4.5. Карактеристике неких влакана која се користи при изградњи композитних ламина

Matrix type	3501-6 epoxy	BSL914C epoxy	LY556/HT907/ DY063 epoxy	MY750/HY917/ DY063 epoxy
Manufacturer	Hercules	DFVLR	Ciba Geigy	Ciba Geigy
Modulus, $E_m$ (Gpa)	4.2	4.0	3.35	3.35
Shear modulus, $G_m$ (Gpa)	1.567	1.481	1.24	1.24
Poisson's ratio, $\nu_m$	0.34	0.35	0.35	0.35
Tensile strength, $Y_{mT}$ (MPa)	69	75	80	80
Compressive strength, $Y_{mC}$ (MPa)	250	150	120	120
Shear strength, $S_m$ (MPa)	50	70	—	—
Tensile failure strain, $\epsilon_{mT}$ (%)	1.7	4	5	5
Thermal coefficient, $\alpha_m$ (10 <sup>-6</sup> /°C)	45	55	58	58

## Трoдимензионално напонско стање композитне ламине

За ламину са неискривљеним влакнима у усмереним у једном правцу, у правцима главних материјалних оса

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{12}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

односно матрица  $[Q_{ij}]$

$$[Q_{ij}] = [S_{ij}]^{-1}$$

У овом случају вредности еластичних коефицијената  $E_3$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ , као и Поасоновог коефицијента  $\nu_{23}$

$$E_2 = E_3$$

$$G_{13} = G_{12}$$

$$G_{23} = \frac{E_3}{2 \cdot (1 + \nu_{23})}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13}$$

Вредност Поасоновог коефицијента  $\nu_{23}$  може се одредити према следећој релацији:

$$\nu_{23} = \nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot (1 - V_f) \cdot \left[ \frac{1 + \nu_m - \nu_{12} \cdot \frac{E_m}{E_1}}{1 - \nu_m^2 + \nu_m \cdot \nu_{12} \cdot \frac{E_m}{E_f}} \right]$$

## 4.8. Коефицијенти топлотног ширења

На механичке карактеристике композитних материјала утичу и атмосферски услови у којима се експлоатишу композитне структуре. У цивилном ваздухопловству



нарочито је важан опсег радних температура од  $-55\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+80\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Коефицијенте топлотног ширења у правцима материјалних оса за композитну ламину сачињену од непрекидних влакана можемо одредити на основу карактеристика матрице и влакана који сачињавају ламину помоћу следећих релација, које су изведене на основу правила мешања.

$$\alpha_{11} = \frac{E_f \cdot \alpha_f \cdot V_f + E_m \cdot \alpha_m \cdot V_m}{E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m}$$

У претходној једначини  $\alpha_{11}$  је коефицијент топлотног ширења у правцу простирања влакана, а вредности  $\alpha_f$  и  $\alpha_m$  су коефицијенти топлотног ширења влакана и матрице. Коефицијент у правцу осе 2 одређујемо према следећој релацији на основу термалних карактеристика матрице, влакана и њихових запреминских удела у композиту.

$$\alpha_{22} = (1 + \nu_m) \cdot \alpha_m \cdot V_m + (1 + \nu_f) \cdot \alpha_f \cdot V_f - \alpha_{11} \cdot (\nu_f \cdot V_f + \nu_m \cdot V_m)$$

За композитне материјале направљене од танких ламина и са непрекидним влакнима који се простиру у једном правцу, коефицијент топлотног ширења у правцу нормалним на правац простирања влакана једнак је

$$\alpha_{33} = \alpha_{22}$$

## 4.9. Коефицијенти ширења услед влажности

Коефицијент ширења услед влажности у правцу простирања влакана за композитну ламину приближно је једнак коефицијенту ширења самих влакана па важи релација:

$$\beta_{11} \approx \beta_f$$

Коефицијенте ширења услед влажности у правцима оса нормалних на правац простирања влакана можемо одредити на основу карактеристика матрице, влакана и њихових запреминских удела у композиту.

$$\beta_{22} = \beta_f + V_f + [\beta_m + (1 + \nu_m) - \beta_f \cdot \nu_m] \cdot (1 - V_f)$$

односно важи релација:

$$\beta_{33} = \beta_{22}$$