




vazmfb.com/kk/

Kompozitne konstrukcije

Vežbe 1
2020.

Katedra za vazduhoplovstvo
Mašinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

Mirko R. Dinulović
Miloš D. Petrašinović 
Mihailo G. Petrović 



Sadržaj vežbe

- Mikromehanika kompozitnih materiala,
- Čvrstoća kompozitne lamine,
- Kriterijumi loma kompozitne lamine



Zapreminski udeli faza i gustina

- V_f - Zapreminski udeo vlakana u kompozitu [-]
- V_m - Zapreminski udeo matrice u kompozitu [-]
- ρ - Gustina kompozita [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]
- ρ_f - Gustina vlakna [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]
- ρ_m - Gustina matrice [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]

$$V_m = 1 - V_f \quad (1)$$

$$\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (2)$$



Poasonov koeficijent

- ν_{12} - Glavni Poasonov koeficijent kompozita [-]
- ν_m - Poasonov koeficijent matrice [-]
- ν_{f12} - Glavni Poasonov koeficijent vlakna [-]

$$\nu_{12} = \nu_{f12} V_f + \nu_m V_m \quad (3)$$

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (4)$$



Modul elastičnosti u pravcu prostiranja vlakana

- E_1 - Modul elastičnosti lamine u pravcu vlakana [GPa]
- E_m - Modul elastičnosti matrice [GPa]
- E_{f1} - Modul elastičnosti vlakna u pravcu vlakana [GPa]
- *Model Vojta (Voigt), pravilo mešanja (Rule of Mixtures - ROM):*

$$E_1 = E_{f1} V_f + E_m V_m \quad (5)$$



Modul elastičnosti u pravcu prostiranja vlakana

- *Model Hasin-Rozen (Hashin-Rosen):*

$$K_f = \frac{E_{f1}}{2(1 - 2\nu_{12})(1 + \nu_{12})} \quad (6)$$

$$K_m = \frac{E_m}{2(1 - 2\nu_m)(1 + \nu_m)} \quad (7)$$

$$E_1 = E_{f1} V_f + E_m V_m + \frac{4K_f K_m G_m V_f V_m (\nu_m - \nu_{f12})^2}{K_f K_m + G_m(V_f K_f + V_m K_m)} \quad (8)$$



Modul elastičnosti u pravcu normalnom na pravac prostiranja vlakana

- E_2 - Modul elastičnosti lamine poprečno na pravac prostiranja vlakana [GPa]
- E_{f2} - Modul elastičnosti vlakna poprečno na pravac prostiranja vlakana [GPa]
- *Model Vojta (Voigt), inverzno pravilo mešanja (inverse Rule of Mixtures - IROM):*

$$E_2 = \frac{E_{f2} E_m}{V_f E_m + V_m E_{f2}} \quad (9)$$



Modul elastičnosti u pravcu normalnom na pravac prostiranja vlakana

- *Model Camisa (Chamis):*

$$E_2 = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}}\right)} \quad (10)$$

- *Model Halpin-Caj (Halpin-Tsai):*

$$E_2 = E_m \frac{(1 + V_f)E_{f2} + V_m E_m}{V_m E_{f2} + (1 + V_f)E_m} \quad (11)$$



Modul elastičnosti u pravcu normalnom na pravac prostiranja vlakana

- *Modifikovana teorija IROM:*

$$\eta_f = \frac{E_{f1} V_f + ((1 - \nu_{f12} \nu_{f21}) E_m + \nu_m \nu_{f21} E_{f1}) V_m}{E_{f1} V_f + E_m V_m} \quad (12)$$

$$\eta_m = \frac{(1 - \nu_m^2) E_{f1} - (1 - \nu_m \nu_{f12} E_m) V_f + E_m V_m}{E_{f1} V_f + E_m V_m} \quad (13)$$

$$E_2 = \frac{1}{\eta_f \frac{V_f}{E_{f2}} + \eta_m \frac{V_m}{E_m}} \quad (14)$$



Modula klizanja kompozitne lamine

- G_{12} - Modul klizanja lamine [GPa]
- G_m - Modul klizanja matrice [GPa]
- G_{f12} - Modul klizanja vlakna [GPa]
- *Model Vojta (Voigt)*, pravilo mešanja (*Rule of Mixtures - ROM*):

$$G_{12} = \frac{E_{f12} G_m}{V_f G_m + V_m G_{f12}} \quad (15)$$



Modula klizanja kompozitne lamine

- *Model Hasin-Rozen (Hashin-Rosen):*

$$G_{12} = G_m \frac{G_{f12}(1 + V_f) + G_m V_m}{G_{f12} V_m + G_m(1 + V_f)} \quad (16)$$

- *Model Camisa (Chamis):*

$$G_{12} = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{f12}}\right)} \quad (17)$$



Modula klizanja kompozitne lamine

- *Model Halpin-Caj (Halpin-Tsai):*

$$\xi = \frac{\frac{G_{f12}}{G_m} - 1}{\frac{G_{f12}}{G_m} + 2} \quad (18)$$

$$G_{12} = G_m \frac{1 + 2\xi V_f}{1 - \xi V_f} \quad (19)$$



Zatezna čvrstoća lamine u pravcu vlakana

- F_{1T} - Zatezna čvrstoća u pravcu vlakana [MPa]
- F_{fT} - Zatezna čvrstoća vlakana [MPa]
- ε_{f1T} - Maksimalna deformacija na zatezanje vlakna [%]
- F_{mT} - Zatezna čvrstoća matrice [MPa]
- ε_{mu} - Maksimalna deformacija matrice [%]

$$F_{1T} = \begin{cases} \varepsilon_{f1T} \leq \varepsilon_{mu}, & F_{fT} \left(V_f + V_m \frac{E_m}{E_{f1}} \right) \\ \varepsilon_{f1T} > \varepsilon_{mu}, & F_{mT} \left(V_f \frac{E_{f1}}{E_m} + V_m \right) \end{cases} \quad (20)$$



Pritisna čvrstoća lamine u pravcu vlakana

- F_{1C} - Pritisna čvrstoća u pravcu vlakana [MPa]
- F_{fC} - Pritisna čvrstoća vlakana [MPa]
- ε_{f1C} - Maksimalna deformacija na pritisak vlakna [%]
- F_{mC} - Pritisna čvrstoća matrice [MPa]



Pritisna čvrstoća lamine u pravcu vlakana

- Model Timošenka i Gira (*Timoshenko and Gere*) za $V_f \leq 0.2$:

$$F_{1C} = 2V_f \sqrt{\frac{V_f E_f E_m}{3(1 - V_f)}} \quad (21)$$

- Model Agarval i Broutman (*Agrawal and Broutman*) za $V_f > 0.2$:

$$F_{1C} = \frac{(E_f V_f + E_m V_m) \left(1 - V_f^{\frac{1}{3}}\right) \varepsilon_{mu}}{\nu_{f12} V_f + \nu_m V_m} \quad (22)$$



Zatezna čvrstoća lamine poprečno na pravac prostiranja vlakana

- F_{2T} - Zatezna čvrstoća poprečno na pravac vlakana [MPa]
- V_{void} - Zapreminski udeo praznina u kompozitu [-]
- *Model Nilsena (Nielsen):*

$$F_{2T} = \left(1 - V_f^{\frac{1}{3}}\right) \frac{E_2 F_{mT}}{E_m} \quad (23)$$



Zatezna čvrstoća lamine poprečno na pravac prostiranja vlakana

- *Model Barbera (Barbero):*

$$C_V = 1 - \sqrt{\frac{4V_{void}}{\pi V_m}} \quad (24)$$

$$F_{2T} = F_{mT} C_V \left(1 + \left(V_f - \sqrt{V_f} \right) \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}} \right) \right) \quad (25)$$



Pritisna čvrstoća lamine poprečno na pravac prostiranja vlakana

- F_{2C} - Pritisna čvrstoća poprečno na pravac vlakana [MPa]
- *Formula Vitona (Weeton):*

$$C_V = 1 - \sqrt{\frac{4V_{void}}{\pi V_m}} \quad (26)$$

$$F_{2C} = F_{mC} C_V \left(1 + \left(V_f - \sqrt{V_f} \right) \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}} \right) \right) \quad (27)$$



Pritisna čvrstoća lamine poprečno na pravac prostiranja vlakana

- F_{2C} - Pritisna čvrstoća poprečno na pravac vlakana [MPa]
- *Formula Vitona (Weeton):*

$$C_V = 1 - \sqrt{\frac{4V_{void}}{\pi V_m}} \quad (28)$$

$$F_{2C} = F_{mC} C_V \left(1 + \left(V_f - \sqrt{V_f} \right) \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}} \right) \right) \quad (29)$$



Smičuća čvrstoća lamine u materijalnoj ravni

- F_6 - Smičuća čvrstoća [MPa]
- F_{mS} - Smičuća čvrstoća matrice [MPa]
- *Formula Stelbrinka (Stellbrink):*

$$C_V = 1 - \sqrt{\frac{4V_{void}}{\pi V_m}} \quad (30)$$

$$F_6 = F_{mS} C_V \left(1 + \left(V_f - \sqrt{V_f} \right) \left(1 - \frac{G_m}{G_{f12}} \right) \right) \quad (31)$$



Naponi i deformacije

- Naponi:
 - σ_1 - Normalni napon u pravcu vlakana
 - σ_2 - Normalni napon poprečno na pravac vlakana
 - τ_6 - Smičući napon
- Deformacije:
 - ε_1 - Deformacija u pravcu vlakana
 - ε_2 - Deformacija u poprečno na pravac vlakana
 - γ_6 - Deformacija klizanja u materijalnoj ravni



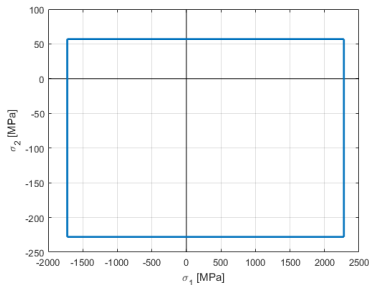
Kriterijumi loma

- S_{σ_1} - Kriterijum za normalne napone u pravcu vlakana
- S_{σ_2} - Kriterijum za normalne napone poprečno na pravac vlakana
- S_{τ_6} - Kriterijum za tangencijalne napona u materijalnoj ravni
- S_{ε_1} - Kriterijum za deformacije u pravcu vlakana
- S_{ε_2} - Kriterijum za deformacije u poprečno na pravac vlakana
- S_{th} - Kriterijum Cai-Hil (Tsai-Hill)
- S_{tw} - Kriterijum Cai-Vu (Tsai-Wu)



Kriterijum maksimalnih napona

$$S_{\sigma_1} > 1 \wedge S_{\sigma_2} > 1 \wedge S_{\tau_6} > 1 \quad (32)$$



$$S_{\sigma_1} = \begin{cases} \sigma_1 > 0, & \frac{F_{1T}}{\sigma_1} \\ \sigma_1 < 0, & \frac{F_{1C}}{|\sigma_1|} \end{cases} \quad (33)$$

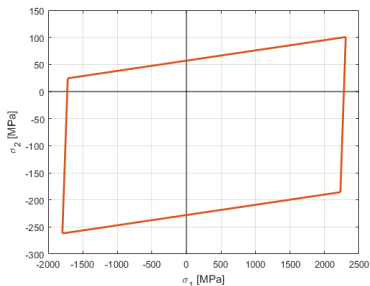
$$S_{\sigma_2} = \begin{cases} \sigma_2 > 0, & \frac{F_{2T}}{\sigma_2} \\ \sigma_2 < 0, & \frac{F_{2C}}{|\sigma_2|} \end{cases} \quad (34)$$

$$S_{\tau_6} = \frac{F_6}{|\tau_6|} \quad (35)$$



Kriterijum maksimalnih deformacija

$$S_{\varepsilon_1} > 1 \wedge S_{\varepsilon_2} > 1 \quad (36)$$



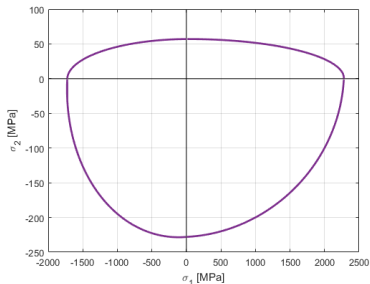
$$S_{\varepsilon_2} = \begin{cases} \varepsilon_2 > 0, & \frac{F_{2T}}{|\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1|} \\ \varepsilon_2 < 0, & \frac{F_{2C}}{|\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1|} \end{cases} \quad (37)$$

$$S_{\varepsilon_2} = \begin{cases} \varepsilon_2 > 0, & \frac{F_{2T}}{|\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1|} \\ \varepsilon_2 < 0, & \frac{F_{2C}}{|\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1|} \end{cases} \quad (38)$$



Kriterijum Tsai-Hill

$$S_{TH} = \left(\frac{\sigma_1}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_6}{F_6}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{F_1^2} < 1 \quad (39)$$



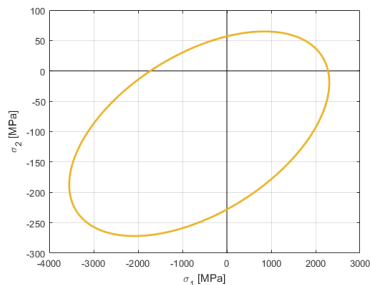
$$F_1 = \begin{cases} \sigma_1 > 0, & F_{1T} \\ \sigma_1 < 0, & F_{1C} \end{cases} \quad (40)$$

$$F_2 = \begin{cases} \sigma_2 > 0, & F_{2T} \\ \sigma_2 < 0, & F_{2C} \end{cases} \quad (41)$$



Kriterijum Tsai-Wu

$$S_{TW} = f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_{11} \sigma_1^2 + f_{22} \sigma_2^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{\tau_6}{F_6} \right)^2 < 1 \quad (42)$$



$$f_1 = \frac{1}{F_{1T}} - \frac{1}{F_{1C}} \quad (43)$$

$$f_{11} = \frac{1}{F_{1T} F_{1C}} \quad (44)$$

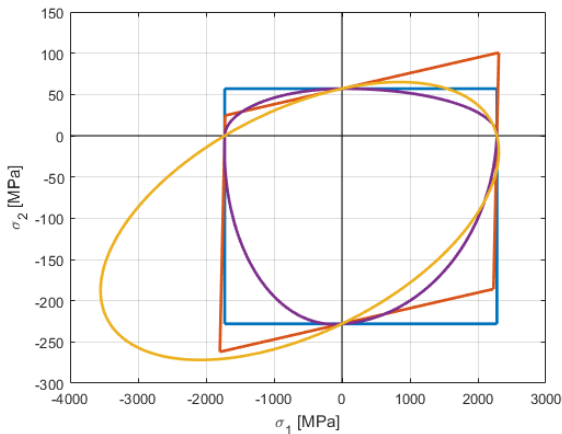
$$f_2 = \frac{1}{F_{2T}} - \frac{1}{F_{2C}} \quad (45)$$

$$f_{22} = \frac{1}{F_{2T} F_{2C}} \quad (46)$$

$$f_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{f_{11} f_{22}} \quad (47)$$



Anvelopa konzervativnog pristupa





Hvala na pažnji!